

GEBRA



KMO $\Sigma \Sigma a$ $f(x) = x - T$

¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

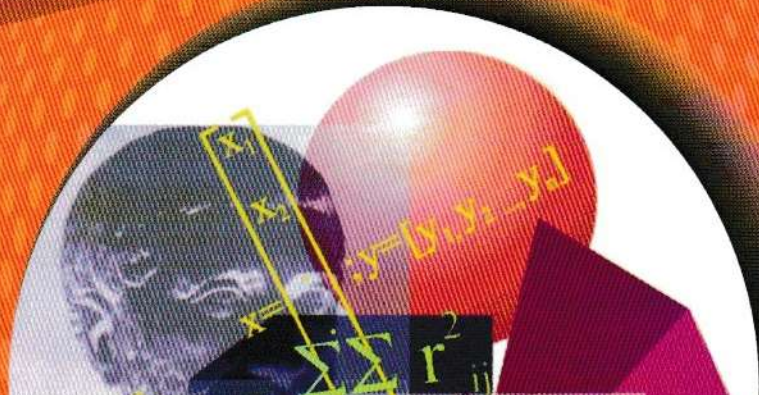
Juan Carlos Ramos Leyva

FONDO EDITORIAL
ARODO

5

Radicación - Racionalización

Teoría y Práctica

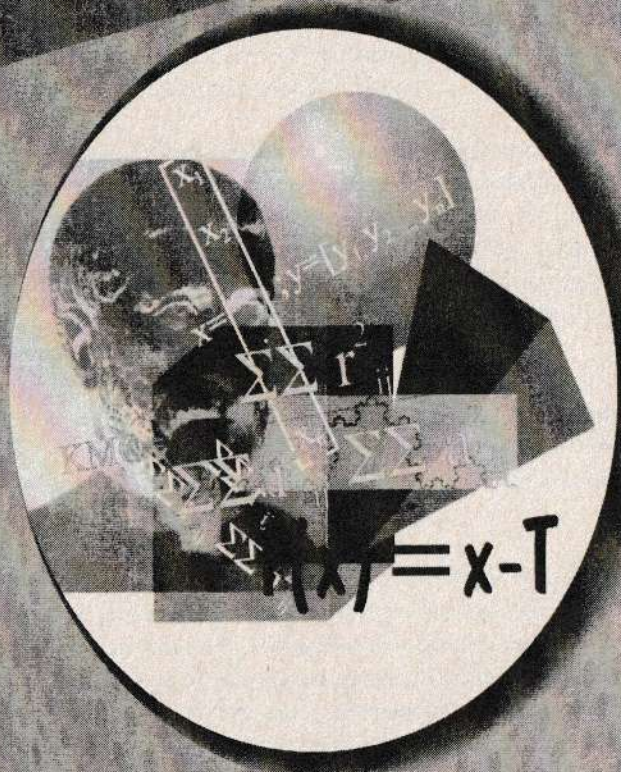
A
L

5

Radicación - Racionalización

Teoría y Práctica

ALGEBRA



¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Juan Carlos Ramos Leyva

FONDO EDITORIAL
PRODO



PRESENTACIÓN

El **Fondo Editorial RODO** es un grupo educativo con formado por profesionales de experiencia que por muchos años vienen participando en el análisis y producción de textos acordes con las necesidades del sistema educativo. Conocedores de la realidad de nuestro educando que día a día nos muestra la interacción con ellos en las aulas de clase y poniendo de manifiesto nuestro compromiso como educadores hemos asumido el reto de contribuir a elevar el nivel académico de manera integral.

Continuando con la elaboración de nuestra colección con miras al ciclo académico 2013, en esta oportunidad presentamos el texto teórico - práctico denominado **TEMAS SELECTOS DE ÁLGEBRA**, desarrollado con la gran experiencia de nuestro grupo humano. Caracterizándolo así por el rigor y la exigencia académica, ya que abarca los temas y preguntas solicitadas según la currícula de los centros preuniversitarios de las universidades más importantes del país relacionados con el curso.

Esta obra es la continuación de nuestra serie de publicaciones, caracterizada por la calidad e innovación constatada en los miles de ingresantes que han tenido como apoyo nuestras colecciones, esperando los comentarios y sugerencias las cuales sabremos aceptar

La presente serie de boletines consta de una sección teórica, donde se muestra toda la teoría referente al capítulo o capítulos mostrados en el boletín, luego se determina una sección de 100 problemas resueltos por los autores clasificados por nivel de exigencia de menor a mayor dificultad, explicados de manera clara y sencilla que servirá tanto para alumnos que recién empiezan su camino a la universidad, como alumnos de nivel avanzado, dándole nuevas alternativas de solución, luego se cuenta con 100 problemas propuestos con sus respectivas claves para que el alumno mida su nivel de comprensión respecto al capítulo con problemas de igual exigencia que la sección anterior, por último se muestra una sección de exámenes de admisión del curso en mención, con soluciones explicadas de la mejor manera.

Fondo Editorial RODO
De: Walter Z. Benítez Nuñez.

RADICACIÓN - RACIONALIZACIÓN



ÁLGEBRA - TEMA SELECTO 05, 1ra Edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, tampoco su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

**DERECHOS RESERVADOS © Setiembre 2013 por
FONDO EDITORIAL RODO**

de Walter Z. Benitez Nuñez

Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña

LIMA 05, PERÚ ☎ 424-6350 📠 992-796104

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú

Nº: 2013 - 18277

EQUIPO PEDAGÓGICO

Juan Carlos Ramos Leyva

DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS

José Miguel Gallo Ballena

IMPRESO EN PERÚ PRINTED IN PERÚ

Impreso en los Talleres Gráficos de **CORPORACIÓN PIANCASH S. A. C.**

Jr. Chancay 446 Of. 112 - Lima 01

FRACCIÓN ALGEBRAICA

DEFINICIÓN

Es toda expresión de la forma $\frac{A}{B}$, donde A es llamado numerador y B denominador, siendo ambos polinomios tal que $A \neq 0 \wedge [B]^{\circ} \geq 1$, veamos algunos ejemplos:

- Son fracciones algebraicas:

$$\frac{x+1}{x^2}; \frac{2}{x} \text{ y } \frac{x^3+1}{x-2}$$

- No son fracciones algebraicas:

$$\frac{2}{7} \text{ y } \frac{x+7}{4}$$

SIGNO DE UNA FRACCIÓN

Dada la fracción F de términos A y B, es decir: $F = \frac{A}{B}$

- Si sus términos son de igual signo, la fracción es positiva.

$$F = \frac{+A}{+B} = \frac{-A}{-B} = + \frac{A}{B} = \frac{A}{B}$$

- Si sus términos son de signo diferentes la fracción es negativa.

$$F = \frac{+A}{-B} = \frac{-A}{B} = - \frac{A}{B}$$

CLASES DE FRACCIONES

- FRACCIÓN PROPIA:** Es aquella fracción donde el grado del numerador es menor que el grado del denominador, en cualquier otro caso la fracción se llama impropia.

- Son fracciones propias:

$$\frac{x}{x^4-1}, \frac{2}{x} \text{ y } \frac{x^7+2x+1}{x^{10}-4x}$$

- Son fracciones impropias:

$$\frac{x^7+1}{x^2-1}, \frac{x^8-x}{x^4} \text{ y } \frac{x+1}{x-4}$$

- FRACCIÓN IRREDUCTIBLE:** Es aquella fracción donde sus términos son PESI (primos entre sí).

- $\frac{x^2+7}{x-1}$ es irreducible

- $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$ no es irreducible, puesto que $(x-1)$ es factor común en sus términos

- 3) **FRACCIÓN DE VALOR CONSTANTE:** Es aquella fracción que asume igual valor numérico para cualquier conjunto de valores admisibles para sus variables.

- $\frac{2x+4}{x+2}$ es de valor constante igual a 2 para todo valor de x distinto de -2

Observación: Los valores admisibles de una variable en una fracción vienen a ser todos aquellos números que no anulan al denominador

Propiedad: Si la fracción:

$$F(x;y) = \frac{ax + bxy + cy}{a_1x + b_1xy + c_1y}$$

es de valor constante se verifica lo siguiente:

$$\text{valor constante} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

- 4) **FRACCIÓN COMPLEJA:** Es aquella fracción donde el numerador y/o denominador es una expresión fraccionaria, veamos algunos ejemplos:

- $\frac{x+1}{1-\frac{1}{x}}, \frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x-1}} \text{ y } \frac{1}{2+\frac{x}{x-1}}$

CARACTERÍSTICAS NOTABLES DE ALGUNAS FRACCIONES

- 1) **FRACCIONES HOMOGÉNEAS:** Dos o más fracciones son homogéneas si presentan el mismo denominador, de no suceder esto las fracciones se llamarán heterogéneas.

- Son fracciones homogéneas:

$$\frac{2x+7}{x^4-1} \text{ y } \frac{x^3-2}{x^4-1}$$

- Son fracciones heterogéneas:

$$\frac{x+1}{x^3-2} \text{ y } \frac{x^2+7}{x+1}$$

- 2) **FRACCIONES EQUIVALENTES:** Dos o más fracciones son equivalentes si asumen igual valor numérico para todo valor admisible de sus variables, veamos un ejemplo:

- $\frac{x^2-x-2}{x^2+x} < > \frac{x^2-2x}{x^2}; \forall x \neq 0 \wedge x \neq -1$

Propiedad: Dadas las fracciones equivalentes. $\frac{A}{B} \wedge \frac{C}{D}$, tenemos:

$$\text{Si: } \frac{A}{B} < > \frac{C}{D} \Rightarrow A \cdot D = B \cdot C$$

SIMPLIFICACIÓN DE UNA FRACCIÓN

Es el proceso mediante el cual se obtiene una expresión equivalente a la fracción dada. Para simplificar a una fracción se consideran los siguientes pasos:

- 1) Se factoriza completamente a los términos de la fracción.
- 2) Se simplifican los factores comunes en los términos de la fracción.

Ejemplo: Simplificar

$$F(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 4x + 3}$$

Resolución: Factorizamos cada término según el método del aspa simple

$$x^2 - x - 12 <> (x - 4)(x + 3)$$

$$x^2 + 4x + 3 <> (x + 1)(x + 3)$$

$$F(x) = \frac{(x - 4)(x + 3)}{(x + 1)(x + 3)} ; x \neq -3 ; x \neq -1$$

Finalmente cancelando factores comunes tenemos:

$$F(x) = \frac{x - 4}{x + 1}$$

OPERACIONES CON FRACCIONES**1) ADICIÓN Y/O SUSTRACCIÓN**

- Para fracciones homogéneas:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x} = \frac{a + b}{x}$$

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{x} = \frac{a - b}{x}$$

- Para fracciones heterogéneas:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{ay + bx}{xy}$$

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = \frac{ay - bx}{xy}$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} - \frac{c}{z} = \frac{ayz + bxz - cxy}{xyz}$$

2) MULTIPLICACIÓN

$$\bullet \quad \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{x} = \frac{a \cdot b}{x \cdot x} = \frac{a \cdot b}{x^2}$$

$$\bullet \quad \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y} = \frac{a \cdot b}{x \cdot y}$$

3) DIVISIÓN

$$\bullet \quad \frac{a}{x} \div \frac{b}{y} <> \frac{\frac{a}{x}}{\frac{b}{y}} = \frac{a \cdot y}{b \cdot x}$$

“Producto de extremos entre producto de medios”

RADICACIÓN**DEFINICIÓN**

Es la operación matemática cuyo objetivo es determinar una expresión llamada **Raíz**, de modo que dicha expresión elevada a un número entero positivo denominado **Índice** reproduzca otra expresión llamada **Radicando**.

$$\sqrt[n]{A} = r \leftrightarrow r^n = A; \quad n \in \mathbb{Z}^+ \wedge A \in \mathbb{R}$$

Donde:

$\sqrt{\quad}$ = Signo radical ; n = Índice

A = Radicando o Cantidad subradical.

r = Raíz n - ésima de A .

**OBSERVACIÓN**

Si el índice de algún signo radical es 2, dicho índice no será necesario escribirlo, se dará por entendido. Por ejemplo: $\sqrt[2]{A} = \sqrt{A}$

CANTIDAD TOTAL DE RAÍCES

Dada la expresión $\sqrt[n]{A}$, ésta presenta en total " n " raíces complejas (reales o imaginarias).

Ejemplos:

- La expresión $\sqrt[3]{10}$ presenta tres raíces.
- La expresión $\sqrt{25}$ presenta dos raíces.

EXISTENCIA DE LAS RAÍCES REALES

Siendo A un número real distinto de cero y " n " un entero positivo.

1° CASO: $\sqrt[n]{A}$ con $A > 0$ tiene sólo dos raíces reales de signos opuestos. A la raíz positiva se le da el nombre de solución principal y sólo esta será el resultado de la operación, a no ser que se especifique por la otra.

Ejemplo:

- Para la expresión: $\sqrt{25}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{5 solución principal!} \\ -5 \end{array} \right.$

2° CASO: $\sqrt[n]{A}$ con $A < 0$ no tiene raíces reales, las raíces son números imaginarios.

3° CASO: $\sqrt[2n+1]{A}$ tiene sólo una raíz real, cuyo signo es igual al signo de A .

Ejemplos:

- Para la expresión: $\sqrt[3]{-8} = -2$
- Para la expresión: $\sqrt[5]{1} = 1$

**OBSERVACIÓN**

Si la expresión $\sqrt[n]{A}$ presenta “k” raíces reales ($k \leq n$) dicha expresión presentará “n – k” raíces imaginarias.

Ejemplo:

- La expresión $\sqrt[4]{81}$ sólo tiene dos raíces reales, pero la cantidad total de raíces es cuatro, por tanto las otras dos raíces serán imaginarias y conjugadas.
- La expresión $\sqrt[7]{10}$ tiene una raíz real y seis raíces imaginarias, las cuales son conjugadas.

RAÍZ CUADRADA DE POLINOMIOS

La raíz cuadrada, $Q(x)$, de un polinomio $P(x)$ se representa por $\sqrt{P(x)}$ y se define como exacta si se verifica la siguiente relación:

$$\sqrt{P(x)} = Q(x) \leftrightarrow Q^2(x) = P(x)$$

Si la raíz $Q(x)$ es inexacta se cumplirá que:

$$P(x) = Q^2(x) + R(x); R(x) = \text{Residuo o Resto}$$

**OBSERVACIÓN**

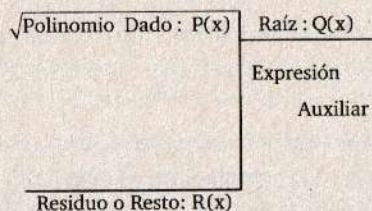
La raíz cuadrada de un polinomio $P(x)$, sólo se define para todos aquellos polinomios de grado par.

ALGORITMO DE LA RAÍZ CUADRADA DE UN POLINOMIO

Para extraer la raíz cuadrada a un polinomio debemos tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Se ordena respecto a una variable y se agrupan los términos de 2 en 2 (período) comenzando de derecha a izquierda.
2. Se extrae la raíz cuadrada al primer término que será el primer término de la raíz, se eleva al cuadrado esta raíz y se resta del polinomio.
3. Se baja el siguiente período, el primer término de estos se divide por el doble del primer término de la raíz. El cociente es el segundo término de la raíz. El segundo término de la raíz se suma con el doble del primer término de la raíz, formando un binomio. Este binomio se multiplica por el segundo término de la raíz restando el producto al período bajado.
4. Se baja el siguiente período, se divide el primer término del residuo por el doble del primer término de la raíz, el cociente es el tercer término de la raíz el cual se añade al doble de la raíz ya encontrada formando un trinomio que se multiplica con el tercer término de la raíz restando el producto del período bajado.
5. Se continúa el proceso hasta que el resto sea de un grado menor que el grado de la raíz o el polinomio idénticamente nulo.

Esquema



Ejemplo: Extraer la raíz cuadrada al siguiente polinomio:

$$P(x) \equiv x^4 - 32x - 6x^3 + 29 + 19x^2$$

Resolución: De acuerdo con los pasos procedemos de la manera siguiente:

$$P(x) \equiv x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 32x + 29$$

$\begin{array}{r} \sqrt{x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 32x + 29} \\ \underline{-x^4} \\ -6x^3 + 19x^2 \\ \underline{6x^3 - 9x^2} \\ 10x^2 - 32x + 29 \\ \underline{-10x^2 + 30x - 25} \\ -2x + 4 \end{array}$	$x^2 - 3x + 5$ $(2x^2 - 3x)(-3x)$ $(2x^2 - 6x + 5)(5)$
--	--

Operaciones descriptivas:

1º) $\sqrt{x^4} = x^2$

2º) $(-6x^3) \div (2x^2) = -3x$

3º) $(10x^2) \div (2x^2) = 5$

Finalmente tenemos: Raíz $\equiv Q(x) \equiv x^2 - 3x + 5$

Resto $\equiv R(x) \equiv -2x + 4$

RACIONALIZACIÓN**DEFINICIÓN**

Es el proceso mediante el cual una expresión irracional se transforma en otra parcialmente racional, frecuentemente se racionalizan denominadores con el uso del factor racionalizante (F.R) según la relación.

$$(\text{Expresión Irracional}) \cdot (\text{FR}) = \text{Expresión Racional}$$

FACTOR RACIONALIZANTE (F.R)

Es el menor número irracional positivo que multiplica a otro número irracional y lo transforma en racional.

Ejemplo: ¿Cuál es el factor racionalizante de $\sqrt{2}$?

Resolución: Observar lo siguiente

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} &= \sqrt{4} = 2 \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} &= \sqrt{16} = 4 \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{18} &= \sqrt{36} = 6 \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{32} &= \sqrt{64} = 8 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots\end{aligned}$$

Existen varios números irracionales que multiplican a $\sqrt{2}$ y lo transforma en racional pero entre todos ellos $\sqrt{2}$ es el menor $\therefore \text{FR} = \sqrt{2}$

RADICAL SIMPLE

Se denomina así a todo número irracional que se puede expresar según la forma:

$$\sqrt[n]{A}; n \in \mathbb{Z}^+ \wedge A \in \mathbb{Q}$$

veamos algunos ejemplos:

$$\bullet \sqrt{3} \qquad \bullet \sqrt[5]{4} \qquad \bullet 2\sqrt{5} = \sqrt{20} \qquad \bullet \sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[6]{7}$$

RADICAL DOBLE

Se denomina así a todo número irracional que se puede expresar según la forma:

$$\sqrt[m]{A \pm \sqrt[n]{B}}; m \wedge n \in \mathbb{Z}^+, A \wedge B \in \mathbb{Q}$$

veamos algunos ejemplos:

$$\bullet \sqrt{4 - \sqrt{12}} \qquad \bullet \sqrt{2 + \sqrt{3}} \qquad \bullet \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$$

TRANSFORMACIÓN DEL RADICAL DOBLE DE LA FORMA $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ EN RADICALES SIMPLES

I. POR FÓRMULA:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \left| \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}} \right|$$

Donde:

$$C = \sqrt{A^2 - B} \quad \text{¡Número Racional!}$$

Ejemplo: Transformar a $\sqrt{4 - \sqrt{12}}$ en radicales simples

Resolución: Observar que : $A = 4 \wedge B = 12$

$$C = \sqrt{(4)^2 - 12} = \sqrt{4} \rightarrow C = 2$$

$$\sqrt{4 - \sqrt{12}} = \left| \sqrt{\frac{4+2}{2}} - \sqrt{\frac{4-2}{2}} \right|$$

$$\sqrt{4 - \sqrt{12}} = |\sqrt{3} - \sqrt{1}|$$

Tener en cuenta que $\sqrt{3} - 1 > 0$, luego se tendrá:

$$\sqrt{4 - \sqrt{12}} = \sqrt{3} - 1$$

II. POR REGLA PRÁCTICA:

Aquí se requiere que el radical doble a transformar presente la siguiente forma $\sqrt{M \pm 2\sqrt{N}}$ para luego plantear relación.

$$\sqrt{M \pm 2\sqrt{N}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} ; x > y$$

donde: $x \cdot y = N \wedge x + y = M$

Ejemplo: Transformar cada radical doble.

a) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$

b) $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Resolución: a) Puesto que ya tiene la forma de la regla práctica procedemos así:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} & = & \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ \downarrow & \swarrow \searrow & \\ 3+2 & 3 \cdot 2 & \end{array}$$

- b) Para que presente la forma de la regla práctica es necesario utilizar un artificio, veamos:

$$\begin{aligned}\sqrt{2-\sqrt{3}} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2(2-\sqrt{3})}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3} \cdot 1}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \\ \therefore \sqrt{2-\sqrt{3}} &= \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

TRANSFORMACIÓN DEL RADICAL DOBLE DE LA FORMA $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$ EN RADICALES SIMPLES

$$\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}} = x \pm \sqrt{y}; x \in \mathbb{Q} \wedge \sqrt{y} \in \mathbb{Q}'$$

Donde para calcular x y y debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x^3 - 3Cx = A & \dots\dots\dots (1) \\ y = x^2 - C & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

siendo: $C = \sqrt[3]{A^2 - B}$ "Racional".

Ejemplo: Transformar $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}$ en radicales simples.

Resolución: Se plantea: $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} = x + \sqrt{y}$

Halleemos el valor de C: $C = \sqrt[3]{10^2 - 108}$

$$C = \sqrt[3]{100 - 108}$$

$$C = \sqrt[3]{-8} = -2$$

Ahora formamos el sistema:

$$\begin{cases} 4x^3 + 6x = 10 & \dots\dots\dots (1) \\ y = x^2 + 2 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

De donde al resolver tenemos: $x = 1 \wedge y = 3$

$$\therefore \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} = 1 + \sqrt{3}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Al reducir : $\frac{a^2 - b^2}{ab} - \frac{ab - b^2}{ab - a^2}$; $a \neq b$

se obtiene:

- A) a B) $\frac{b}{a}$ C) $\frac{a}{b}$
D) b E) ab

2. Si $R(x)$ es el residuo de extraer raíz cuadrada al Polinomio:

$$P \equiv x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 32x + 29$$

Calcular $R(-1)$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 4 E) 6

3. El equivalente de:

$$\frac{1}{x^2 - 3 + 2x} + \frac{1}{1 - 3x^2 + 2x} - \frac{2}{3x^2 + 10x + 3}$$

es:

- A) 0 B) 1 C) -1
D) x E) $\frac{x}{x-1}$

4. Reducir:

$$\sqrt{8 + \sqrt{60}} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$$

- A) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ B) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$
C) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$
D) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ E) 2

5. Reducir:

$$\frac{8}{(x^2 + 3)(x^2 - 1)} + \frac{2}{x^2 + 3} + \frac{1}{x + 1}$$

- A) $\frac{1}{x}$ B) $\frac{1}{x+1}$ C) $\frac{1}{x-1}$
D) 0 E) $\frac{1}{x^2 + 3}$

6. Reducir:

$$\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{11 + 2\sqrt{30}} + 1$$

- A) $\sqrt{6}$ B) 0 C) 1
D) $-\sqrt{6}$ E) $\sqrt{6} - \sqrt{5}$

7. Efectuar la siguiente adición:

$$\frac{xy}{ab} + \frac{(x-a)(y-a)}{a(a-b)} + \frac{(x-b)(y-b)}{b(b-a)}$$

- A) 0 B) x C) y
D) ab E) 1

8. Reducir:

$$\sqrt{6 + 2\sqrt{3}} + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

- A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{3}$

9. Encontrar el equivalente de:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{a + \frac{1}{b}}} - \frac{2ab + a(1 + ab) + 1}{1 + (a + 1)b}$$

- A) a B) b C) $-a$
D) $-b$ E) $\frac{a}{b}$

10. Reducir:

$$\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{5} + 1} - \sqrt{3}$$

- A) $-\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $-\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}$ E) 1

11. Simplificar:

$$\frac{x - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x(x-1)}{x+1}}$$

- A) 1 B) -1 C) x
D) -x E) $\frac{1}{x}$

12. Si "N" es el Denominador Racional de

$$\frac{7}{\sqrt[3]{5} + 1} \text{ y "K" es el Denominador Racional de}$$

$$\frac{5}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{5}}. \text{ Calcular "N + K"}$$

- A) 4 B) 2 C) 10
D) 8 E) 6

13. Simplificar la siguiente fracción:

$$\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

- A) $\frac{x-1}{x+1}$ B) $\frac{x+1}{x-1}$ C) $\frac{x}{x+1}$
D) $\frac{x}{x-1}$ E) $\frac{x+1}{x}$

14. Reducir: $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{2}}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}}$

- A) 1,6 B) 2,6 C) 3,6
D) 4,6 E) 5,6

15. Simplifíquese:

$$\frac{(x+y)^2 - (xy+1)^2}{x^2 - 1}$$

- A) $y^2 - 1$ B) $1 - y^2$ C) $x^2 - 1$
D) $1 - x^2$ E) xy

16. Reducir:

$$\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{7})^2} - \sqrt{(\sqrt{7} - 1)^2}$$

- A) 1 B) -1 C) $\sqrt{7}$
D) $-\sqrt{7}$ E) 3

17. Efectuar:

$$\left(\frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - 2x - 15} \right) \div \left(\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 4x - 5} \right)$$

- A) 1 B) -1 C) x
D) -x E) $\frac{1}{x}$

18. Si $8x - 1 < 0$. Determinar la raíz cuadrada

$$\text{de } 4x^2 + \sqrt{x^2 - x + 0,25} - 0,4375$$

- A) $2x - \frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{4} - 2x$ C) $\frac{1}{2} - 2x$
D) $-\frac{1}{2} + 2x$ E) $2x + 4$

19. El equivalente de:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}} + \frac{x-1}{2x} \text{ es:}$$

- A) $\frac{x-1}{2}$ B) $\frac{3x-1}{2x}$ C) $1+x$
D) $\frac{3x+1}{2x}$ E) $\frac{x-1}{2x}$

20. El equivalente de $\sqrt{4 - \sqrt{15}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ es:

- A) $\sqrt{3 - 2\sqrt{3}}$ B) $\sqrt{3 - \sqrt{5}}$
C) $\sqrt{4 - \sqrt{3}}$
D) $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ E) $\sqrt{3 + 3\sqrt{5}}$

21. Proporcionar el equivalente de:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} - \frac{x}{x+1} + \frac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} + \frac{x-1}{1-2x}$$

- A) 2x B) 1 C) 0
D) -1 E) -2

22. Simplificar:

$$\frac{\left(\frac{x+2a}{x+a}\right)^2 - \frac{x+2a}{x+a} - 2}{\frac{x+2a}{x+a} - 2}; x \neq -a$$

- A) $\frac{x+2a}{x+a}$ B) $\frac{2x+3a}{x+a}$
C) $\frac{2x-3a}{x+a}$
D) $\frac{x-2a}{x+a}$ E) $\frac{2x+3a}{x-a}$

23. El equivalente de la fracción:

$$\frac{3 + \frac{12xy}{4x^2 - 2xy + y^2}}{\left(\frac{8x^3 - y^3}{8x^3 + y^3}\right)\left(\frac{2y}{y-2x} - 1\right)}$$

es:

- A) -3 B) 3 C) -2
D) 2 E) -1

24. Simplificar:

$$\frac{(x+y+z+w)[(x+y+z)^2 - w(x+y+z) + w^2] - w^3}{(x+y+z)^2}$$

- A) 0 B) x+y
C) x+y+z
D) x+y+z+w E) x-y-z

25. Proporcionar el equivalente de:

$$\frac{(1+ab)(1+ac)}{(a-b)(c-a)} + \frac{(1+ab)(1+bc)}{(b-a)(c-b)} + \frac{(1+ac)(1+bc)}{(c-a)(b-c)}$$

- A) a B) b C) c
D) 0 E) 1

26. Reducir:

$$\frac{\frac{x^2}{1 - \frac{1}{\frac{x^2}{x^2 + \frac{x}{x + \frac{1}{x}}}}} + \frac{x^2 - 2}{1 - \frac{1}{\frac{x^2}{x^2 - \frac{x}{x - \frac{1}{x}}}}}$$

- A) x^2 B) $2x^2$ C) $-x^2$
D) $-2x^2$ E) 2

27. El equivalente de:

$$\frac{x^2 - (y-z)^2}{(x+z)^2 - y^2} + \frac{y^2 - (x-z)^2}{(x+y)^2 - z^2} + \frac{z^2 - (x-y)^2}{(y+z)^2 - x^2}$$

es:

- A) 1 B) x+y+z C) xyz
D) $\frac{1}{xyz}$ E) $\frac{x+y+z}{xyz}$

28. Si se verifica:

$$\frac{1}{1-a} - \frac{1}{1+a} - \frac{2a}{1+a^2} - \frac{4a^3}{1+a^4} - \frac{8a^7}{1+a^8} <> \frac{ma^n}{1-a^{16}}$$

Proporcionar el valor de "m+n"

- A) 30 B) 31 C) 32
D) 33 E) 34

29. Si se verifica que:

$$\frac{a^2+ab+b^2}{a+b} + \frac{a^2-ab+b^2}{a-b} - \frac{2ab^2}{a^2-b^2} <> ma$$

¿Cuáles es el valor de m?

- A) 30 B) 31 C) 32
D) 33 E) 34

30. Si se verifica que:

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$$

Calcular el valor de:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 8ab + 8ac + 8bc}{ab + bc + ac}$$

- A) 3 B) 6 C) 9
D) 12 E) 1
31. Si: $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = -1$; $xyz \neq 0$

Calcular el valor de:

$$\frac{x + y + z + 1}{(1 + x^{-1})(1 + y^{-1})(1 + z^{-1})}$$

- A) xyz B) $x + y + z$
C) $\frac{x + y + z}{xyz}$
D) 1 E) -1
32. Si: $a + b + c = 0$; Calcular el valor numérico de:

$$\frac{(a-b)^2}{ab(c^2 - 4ab)} + \frac{(b-c)^2}{bc(a^2 - 4bc)} + \frac{(c-a)^2}{ac(b^2 - 4ac)}$$

- A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2
33. Si: $\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ac} = 3$; $a, b, c \in \mathbb{R}^*$

Calcular el valor de:

$$\left(\frac{2a+b+c}{a}\right)\left(\frac{a+3b+c}{b}\right)\left(\frac{a+b+4c}{c}\right)$$

- A) 100 B) 120 C) 150
D) 180 E) 200

34. Descomponer: $\frac{10x^2 - 6x - 22}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$

Indicando como respuesta la suma de los numeradores de todas las fracciones simples encontradas.

- A) 8 B) 10 C) 6
D) 12 E) 4

35. Calcular el producto de los numeradores de las fracciones simples en la que se transforma la siguiente fracción:

$$\frac{x+3}{x^2+2x+1}$$

- A) 6 B) 1 C) 2
D) 12 E) 8
36. Descomponer en fracciones parciales la siguiente fracción:

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 - 1}$$

para luego indicar la suma de los numeradores

- A) 3 B) 4 C) 2
D) 7 E) 5
37. Si al descomponer la fracción:

$$\frac{5x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)}$$

en fracciones parciales se obtuvo:

$$\frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

¿Cuál es el valor de " $ab - c$ "?

- A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

38. Si: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

Calcular el valor de T, donde:

$$T = \frac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{ax + by + cz}$$

- A) 1 B) 0 C) abc
D) xyz E) -1

39. Si: $\frac{x}{y} = \frac{w}{z}$

Proporcionar el equivalente de:

$$\frac{(x+w)(y+z)}{x+y+z+w} - \frac{xy}{x+y} - \frac{wz}{w+z}$$

- A) 0 B) xy C) wz
D) xyzw E) $\frac{xw}{yz}$

40. Si: $\frac{a}{b} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = K \dots\dots\dots(1)$

$$\frac{ac}{xz} + \frac{2(3b+5c)}{3y+5z} + \frac{ay\sqrt[3]{bz}}{bx\sqrt[3]{cy}} = 16 \dots\dots\dots(2)$$

Indicar el valor de $K > 0$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

41. Si: $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \frac{x_4}{y_4} \dots\dots\dots(1)$

$$x_1 y_2 x_3 y_4 = 216 \dots\dots\dots(2)$$

$$y_1 x_2 y_3 = 54 \dots\dots\dots(3)$$

Calcular el valor de x_4

- A) 6 B) 3 C) 2
D) 4 E) 12

42. Dada la siguiente serie:

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{35} = \frac{\sqrt{4+y^2}}{70} = \frac{\sqrt{9+z^2}}{105}$$

Calcular el valor de " xyz ", Si:

$$x + y + z = 6$$

- A) 2 B) 3 C) 8
D) 4 E) 6

43. Si: $\frac{x^2 - yz}{x - 1} = \frac{y^2 - xz}{y - 1} = \frac{z^2 - xy}{z - 1}$

proporcionar el equivalente de:

$$\sqrt{\frac{xy + xz + yz}{x + y + z}}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

44. Si: $x \neq 1$; $y \neq 1 \wedge x \neq z$

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{xz - y^2}{1 - y}$$

Entonces ambas fracciones son iguales a:

- A) xyz B) $x + y + z$
C) $x - y - z$
D) $\frac{xy}{z}$ E) $x^2 + y^2 + z^2$

45. Calcular " $a+b$ "; sabiendo que la fracción:

$$\frac{(a+2)x^4 + 6x^2y^2 + 12y^2}{4x^4 + (b-1)x^2y^2 + (b+3)y^2}$$

Admite un valor constante para cualquier valor permisible de $x \wedge y$

- A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 11

52. Conociendo que:

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} + \frac{y^2 + z^2}{y + z} + \frac{x^2 + z^2}{x + z} = xyz$$

Proporcionar el equivalente de:

$$\frac{y}{xz(x+y)} + \frac{z}{xy(y+z)} + \frac{x}{yz(x+z)}$$

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{16}$

53. Dado $P(x) \equiv \frac{mx+1}{x-4}$

Calcular el valor de "m" si:

 $P[P(x)]$, es independiente de x

- A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $-\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

54. Al racionalizar y simplificar a:

$$\frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^3 - 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - 5\sqrt{5}}$$

el denominador resultante es:

- A) 12 B) 15 C) 18
D) 32 E) 42

55. Luego de racionalizar al denominador de la expresión:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{b-c} + \sqrt[3]{c-a}}$$

Indicar como respuesta el número de factores lineales que se obtiene en su denominador

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

56. Efectuar:

$$(\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{3})\sqrt{6+4\sqrt{3}}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

57. Extraer la raíz cuadrada de:

$$(x+1)^2 - 2\left[x + \sqrt{x^2 - x - 6} + \frac{1}{2}\right] - (x-1)^2$$

Sabiendo que $x > 3$

- A) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2}$ B) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2}$
C) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+3}$
D) $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3}$ E) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3}$

58. Simplificar:

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[8]{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt[6]{\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt[12]{5\sqrt{2}-7}}$$

- A) -10 B) -2 C) -1
D) 0 E) 1

59. Reducir:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

- A) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$
D) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

60. Reducir:

$$\frac{8}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1} + \frac{12}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1}$$

- A) $2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 9$ B) $2\sqrt{2} + \sqrt{3} - 10$
C) $2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 9$
D) $2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 9$ E) $5\sqrt{2} + 5\sqrt{6} + 2$

61. Al racionalizar y simplificar la fracción:

$$\frac{24x^4y^3}{\sqrt[5]{120x^2y^7}}$$

El denominador de la fracción resultante es:

- A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 D) 1

62. Transformar a radicales simples

$$\sqrt{5x+16y} - \sqrt{240xy+192y^2+192y-60x-48y-48}$$

- A) $\sqrt{3x+2y+1} - \sqrt{2x+12y}$
B) $\sqrt{5x+3y+2} - \sqrt{13y-1}$
C) $\sqrt{5x+4y+4} - \sqrt{12y-3}$
D) $\sqrt{5x+y+1} - \sqrt{15y}$
E) $\sqrt{5x-4y+4} - \sqrt{20y+1}$

63. Efectuar:

$$T = \frac{3}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

- A) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}$
D) 1 E) 0

64. El equivalente de:

$$E = \left(\frac{\sqrt[3]{11\sqrt{2}+9\sqrt{3}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{97+56\sqrt{3}}} \right)^{\frac{2}{3}} \text{ es:}$$

- A) -1 B) 1 C) 2
D) $\sqrt[3]{2}$ E) $\sqrt[3]{3}$

65. Proporcionar el equivalente de:

$$K = \sqrt{7+2\sqrt{12}} + \sqrt{7-2\sqrt{12}}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

66. A partir de la siguiente equivalencia:

$$\sqrt{10} \left[\frac{\sqrt{\sqrt{10}+3} + \sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}+1} + \sqrt{\sqrt{10}-1}} \right] < \alpha \sqrt{\theta} - \theta \sqrt{\alpha};$$

$\{\alpha, \theta\} \subset \mathbb{N}$. Determinar el valor de " $\alpha \cdot \theta$ "

- A) 6 B) 12 C) 8
D) 10 E) 15

67. Al racionalizar:

$$\frac{2(\sqrt{15}-\sqrt{7})}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}} \text{ Se obtiene:}$$

- A) $\sqrt{5} + \sqrt{3} - 1$ B) $\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{7} + 1$
C) $\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{7} + 1$
D) $\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{7} - 1$ E) $\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{7} - 1$

68. Proporcionar el denominador racionalizado de:

$$\frac{1}{\sqrt{x}(y-z) + \sqrt{y}(z-x) + \sqrt{z}(x-y)}$$

- A) $(x-y)(x-z)(z-y)$ B) $(x+y)(x+z)(y+z)$
C) xyz
D) $3xyz$ E) 1

69. Al efectuar:

$$\frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}} + \frac{4}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}} - \frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}$$

Se obtiene:

- A) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ B) 0
C) $\sqrt{5} - 1$
D) 1 E) $\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$

70. El equivalente de:

$$\left(1 - \frac{4}{\sqrt[4]{1+\sqrt{2}}}\sqrt{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\right)^{(1+\sqrt{2})^{\frac{21}{2}}}$$

es:

- A) $\sqrt{2} - 1$ B) $\sqrt{2} + 1$
C) $\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{2}$ E) 1

71. Indicar el coeficiente del denominador racionalizado y simplificado de:

$$\frac{\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x+y}}$$

- A) 3 B) 4 C) 2
D) 1 E) xy

72. Luego de racionalizar:

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{x\sqrt[3]{x^2} + x\sqrt[3]{x} + 1}$$

Indicar el denominador

- A) $x+1$ B) x C) $x-1$
D) $x-2$ E) 1

73. El equivalente de:

$$\frac{x}{\sqrt[5]{x-y^4} - \sqrt[5]{y^3x-y^4} + \sqrt[5]{xy-y^2} + \sqrt[5]{y^4} - \sqrt[5]{y(x-y)^3}}$$

es:

- A) $\sqrt[5]{x-y} + \sqrt[5]{y}$ B) $\sqrt[5]{x+y} + \sqrt[5]{y}$
C) $\sqrt[5]{x-y} + 1$
D) $\sqrt[5]{x-y} - \sqrt[5]{y}$ E) 1

74. El valor más simple de:

$$\frac{6}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{\sqrt{48} + \sqrt{27} - \sqrt{125}}{\sqrt{12} + \sqrt{108} - \sqrt{180}}} + \frac{10 + 3\sqrt{15}}{6} \right] - 3\sqrt{5}$$

es:

- A) 0 B) 1 C) $2\sqrt{3}$
D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{2}$

75. El denominador racional de:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{7} - 6} \quad \text{es:}$$

- A) 300 B) 180 C) 250
D) 120 E) 200

76. Efectuar:

$$\frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{6}} + \sqrt{10-\sqrt{15}}} + \frac{1-\sqrt{4-\sqrt{15}}}{\sqrt{6}}$$

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$
D) 2 E) 1

77. Indicar el denominador racional de:

$$\frac{1}{1 + \sqrt[5]{8} - \sqrt[5]{4}}$$

- A) 245 B) 120 C) 320
D) 225 E) 345

78. Sabiendo que:

$$\frac{x^2 + x + 1}{\sqrt[3]{2^2 + 1}} = \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{2^{n+1}}}; x > 0$$

Calcular "m" de:

$$\frac{m+1}{m-1} = \frac{(x^2 + x + 1 + \sqrt{2x^3 + x^2 + 2x})^{\frac{n}{2}}}{(x^2 + x + 1 - \sqrt{2x^3 + x^2 + 2x})^{\frac{n}{2}}}$$

- A) 5 B) 4 C) 2
D) 3 E) 6

79. Reducir:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{19}+\sqrt{20}} \right)^{-1}$$

Indicar como respuesta el denominador racional.

- A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 18

80. Dado el polinomio:

$$P(x) \equiv 16x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$$

Calcule la suma de los coeficientes pares disminuido en la suma de los coeficientes impares si dicho polinomio tiene raíz cuadrada exacta y además se cumple que:

$$(c-2)^2 + b = a + 9$$

- A) 26 B) 28 C) 32
D) 34 E) 36

81. Si se cumple:

$$\sqrt{5x-2} + 2\sqrt{6x^2-7x-3} < \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx-a}$$

Tal que: $\{a, b, c\} \subset \mathbb{N}$. Calcular "a + b + c"

- A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

82. Proporcionar el valor de $\frac{\alpha \cdot \theta}{\gamma}$ si el radical

doble: $\sqrt{\alpha x + \theta y} + \sqrt{(\alpha \theta + \gamma)xy}$ puede descomponerse en dos radicales simples

- A) 3 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$
D) 2 E) $\frac{1}{4}$

83. Si $m \in \mathbb{N}$. Calcular " $m^2 - 1$ " sabiendo que se verifica:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{m} + m\sqrt{m} + 2m\sqrt{m!}}}{\sqrt{m\sqrt{m}}} < \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

- A) 8 B) 15 C) 3
D) 24 E) 35

84. Al extraer la raíz cuadrada de:

$x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x - 3}$. Se obtiene 2 radicales simples cuadráticos. Calcular el valor numérico de uno de ellos para $x = 7$.

- A) $1 \vee 2$ B) $\sqrt{2} \vee 3$ C) $2 \vee 3$
D) $\sqrt{2} \vee 2$ E) $\sqrt{2} \vee \sqrt{3}$

85. Sabiendo que:

$$x^2 = x + 1; x > 0$$

Reducir:

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{\frac{x-1}{2}}$$

- A) $\frac{x}{2}$ B) $\sqrt{2}x$ C) $x + 1$
D) $\frac{\sqrt{2}}{x}$ E) $\frac{\sqrt{2}x}{2}$

86. Reducir:

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{7}-1} - \sqrt{15+2\sqrt{15}+2\sqrt{35}+2\sqrt{21}}$$

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 1
D) 0 E) -1

87. El equivalente de:

$$\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x - \sqrt{x^2 + 1}} - \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right) \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

x > 2012 es:

- A) -4x B) 4x C) -x
D) x E) -2x

88. El equivalente de:

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{19-8\sqrt{3}} + \sqrt{3+\sqrt{36}} \text{ es:}$$

- A) 8 B) 9 C) 10
D) 12 E) 13

89. Descomponer en radicales simples:

$$\sqrt{3-\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

- A) $\sqrt{3}-1$ B) $\sqrt{2}-1$
C) $\sqrt{3}+1$
D) $\sqrt{2}+1$ E) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

90. Si: $\sqrt{a+2\sqrt{b}} < \frac{7}{\sqrt{8}-1} + \frac{2}{\sqrt{3}+1}$

Donde "a" y "b" son números racionales.
Calcular el valor de "a+b"

- A) 24 B) 27 C) 35
D) 38 E) 45

91. Proporcionar el equivalente de:

$$\sqrt{11+\sqrt{112}} - \sqrt{11-\sqrt{112}}$$

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

92. Reducir:

$$\sqrt{3-\sqrt{3}} + \sqrt{2+2\sqrt{2}} \sqrt{3+\sqrt{2}} - \sqrt{12} + \sqrt{18-\sqrt{128}}$$

Transformando a radicales simples sucesivamente

- A) $2\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) 4
D) 3 E) 2

93. Halle "a" para que el residuo de extraer raíz cuadrada al polinomio:

$$P(x) = 4x^2 + 4x + a, \text{ sea cero}$$

- A) -1 B) 1 C) -2
D) 2 E) 3

94. Encontrar el residuo que se obtiene al extraer la raíz cuadrada a:

$$P(x) = x^6 + 4x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 12x + 8$$

- A) -1 B) -2 C) 1
D) 2 E) 0

95. Si el residuo de:

$$\sqrt{(x+1)^4 + 4(x+1)^3 - 2(x+1)^2 - 11(x+1) + 11}$$

El equivalente a: mx + n

Proporcionar el valor de: "m.n"

- A) 12 B) 6 C) 5
D) 4 E) 3

96. Proporcionar el valor de "n + k" si el resto que se obtiene al extraer raíz cuadrada a:

$$x^6 - 6x^5 + 13x^4 - 18x^3 + 22x^2 + nx + k$$

Es idéntico A: $-x + 5$

- A) 0 B) 1 C) -1
D) 2 E) -2

97. Calcular el valor de "a - b". Si el polinomio:

$$ax^8 + bx^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1 \text{ .Es cuadrado perfecto}$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

98. Si: $\sqrt{a + 4\sqrt{b + 2}} < \sqrt{a - 2} + \sqrt{2b}$,
 $\{a; b\} \subset \mathbb{N} / a > b$

Descomponer en radicales simples:

$$\sqrt{a + b + 2\sqrt{a + 6b}}$$

- A) $\sqrt{7} + \sqrt{2}$ B) $\sqrt{7} - 2$ C) $\sqrt{2} + 7$
D) $\sqrt{7} + 1$ E) $\sqrt{2} - \sqrt{7}$

99. Proporcionar el valor de " $\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\theta}}$ " a partir de la siguiente equivalencia:

$$\sqrt{11\sqrt{2} - 12} < \sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\theta}; \alpha > 0 \wedge \{\alpha; \theta\} \subset \mathbb{N}$$

- A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C) $\sqrt{2}$
D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

100. Si: $\{x; y; z\} \subset \mathbb{Q}^+$ proporcionar el valor de " $x + y + z$ ". Sabiendo que:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} < \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}$$

- A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{11}{9}$
D) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{7}{9}$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**Resolución 1:** Sea la expresión:

$$E = \frac{a^2 - b^2}{ab} - \frac{ab - b^2}{ab - a^2}; a \neq b$$

$$E = \frac{a^2 - b^2}{ab} - \frac{b(a - b)}{-a(a - b)}$$

$$E = \frac{a^2 - b^2}{ab} + \frac{b}{a}$$

Dando común denominador tenemos:

$$E = \frac{a^2 - b^2 + b^2}{ab}$$

$$E = \frac{a^2}{ab}$$

$$\therefore E = \frac{a}{b}$$

Rpta.: C**Resolución 2:** De acuerdo con el algoritmo procedemos de la manera siguiente:

$\sqrt{x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 32x + 29}$	$x^2 - 3x + 5$
$-x^4$	$(2x^2 - 3x)(-3x)$
$-6x^3 + 19x^2 - 32x + 29$	$(2x^2 - 6x + 5)(5)$
$6x^3 - 9x^2$	
$10x^2 - 32x + 29$	
$-10x^2 + 30x - 25$	
$-2x + 4$	

Observa que:

$$R(x) \equiv -2x + 4$$

Haciendo $x = 1$:

$$R(-1) = -2(-1) + 4 = 2 + 4$$

$$\therefore R(-1) = 6$$

Rpta.: E

Resolución 3: Sea

$$E = \frac{1}{x^2 - 3x + 2x} + \frac{1}{1 - 3x^2 + 2x} - \frac{2}{3x^2 + 10x + 3}$$

$$E = \frac{1}{x^2 + 2x - 3} - \frac{1}{3x^2 - 2x - 1} - \frac{2}{3x^2 + 10x + 3}$$

Factorizando cada denominador según el criterio del aspa simple tenemos:

$$E = \frac{1}{(x+3)(x-1)} - \frac{1}{(3x+1)(x-1)} - \frac{2}{(3x+1)(x+3)}$$

$$E = \frac{3x+1 - (x+3) - 2(x-1)}{(3x+1)(x+3)(x-1)}$$

$$E = \frac{3x+1 - x - 3 - 2x + 2}{(3x+1)(x+3)(x-1)}$$

$$E = \frac{0}{(3x+1)(x+3)(x-1)}$$

$$\therefore E = 0$$

Rpta.: A

Resolución 4: Supongamos que "k" es el equivalente de la expresión y como:

$$\sqrt{60} = 2\sqrt{15} \text{ tenemos:}$$

$$k = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$$

Transformando a radicales simples según el método práctico:

$$k = \sqrt{8 + 2\sqrt{5 \cdot 3}} - \sqrt{5 + 2\sqrt{3 \cdot 2}}$$

$$k = \sqrt{5} + \sqrt{3} - (\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$k = \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\therefore k = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

Rpta.: B

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 05**Resolución 5:**

Sea :

$$E = \frac{8}{(x^2+3)} + \frac{2}{x^2+3} + \frac{1}{x+1}$$

Dando común denominador tenemos:

$$E = \frac{8 + 2(x^2 - 1) + (x^2 + 3)(x - 1)}{(x^2 + 3)(x^2 - 1)}$$

$$E = \frac{8 + 2x^2 - 2 + x^3 + 3x - x^2 - 3}{(x^2 + 3)(x^2 - 1)}$$

$$E = \frac{x^3 + x^2 + 3x + 3}{(x^2 + 3)(x^2 - 1)} = \frac{x^2(x+1) + 3(x+1)}{(x^2 + 3)(x^2 - 1)}$$

$$E = \frac{(x^2 + 3)(x + 1)}{(x^2 + 3)(x + 1)(x - 1)} ; x \neq -1$$

$$\therefore E = \frac{1}{x - 1}$$

Rpta.: C**Resolución 6:**

Si "k" es el equivalente de la expresión, dando uso de la transformación a radicales simples tenemos:

$$k = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{11 + 2\sqrt{30}} + 1$$

$$k = \sqrt{6 - 2\sqrt{5.1}} - \sqrt{11 + 2\sqrt{6.5}} + 1$$

$$k = \sqrt{5} - \sqrt{1} - (\sqrt{6} + \sqrt{5}) + 1$$

$$k = \sqrt{5} - 1 - \sqrt{6} - \sqrt{5} + 1$$

$$\therefore k = -\sqrt{6}$$

Rpta.: D

Resolución 7: Sea la expresión:

$$E = \frac{xy}{ab} + \frac{(x-a)(y-a)}{a(a-b)} + \frac{(x-b)(y-b)}{b(b-a)}$$

Daño común denominador tenemos:

$$E = \frac{(a-b)xy + b(x-a)(y-a) - a(x-b)(y-b)}{ab(a-b)}$$

$$E = \frac{axy - bxy + bxy - aby - abx + a^2b - axy + aby + abx - ab^2}{ab(a-b)}$$

Reduciendo en el denominador tenemos:

$$E = \frac{a^2b - ab^2}{ab(a-b)} = \frac{ab(a-b)}{ab(a-b)}$$

$$\therefore E = 1$$

Rpta.: E

Resolución 8: Si "k" es el equivalente de la expresión, podemos reescribir así:

$$k = \sqrt{6 + 2\sqrt{3} \cdot 1 + 2\sqrt{3} \cdot 2 + 2\sqrt{2} \cdot 1} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3} \cdot 1}$$

$$k = \sqrt{6 + 2\sqrt{3}\sqrt{1} + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\sqrt{1}} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}\sqrt{1}}$$

$$k = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{1})^2} - \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{1})^2}$$

$$k = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{1} - (\sqrt{3} + \sqrt{1})$$

$$k = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{1} - \sqrt{3} - \sqrt{1}$$

$$\therefore k = \sqrt{2}$$

Rpta.: C

Resolución 9: Sea la expresión:

$$E = \frac{1}{1 + \frac{1}{a + \frac{1}{b}}} - \frac{2ab + a(1 + ab) + 1}{1 + (a + 1)b}$$

$$E = \frac{1}{1 + \frac{b}{ab + 1}} - \frac{2ab + a(1 + ab) + 1}{1 + (a + 1)b}$$

$$E = \frac{ab + 1}{ab + 1 + b} - \frac{2ab + a + a^2b + 1}{1 + ab + b}$$

$$E = \frac{ab + 1 - 2ab - a - a^2b - 1}{ab + 1 + b}$$

$$E = \frac{-ab - a - a^2b}{ab + 1 + b} = \frac{-a(b + 1 + ab)}{ab + 1 + b}$$

$$\therefore E = -a$$

Rpta.: A**Resolución 10:** Sea la expresión:

$$E = \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{5} + 1} - \sqrt{3}$$

Racionalizando cada denominador tenemos:

$$E = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} - \frac{4(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} - \sqrt{3}$$

$$E = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} - \frac{4(\sqrt{5} - 1)}{4} - \sqrt{3}$$

$$E = \sqrt{5} + \sqrt{3} - (\sqrt{5} - 1) - \sqrt{3}$$

$$E = \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + 1 - \sqrt{3}$$

$$\therefore E = 1$$

Rpta.: E

Resolución 11: Sea la expresión:

$$E = \frac{x - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x(x-1)}{x+1}}$$

$$E = \frac{\frac{x^2 + x - x + 1}{x+1}}{\frac{x+1+x^2-x}{x+1}}$$

$$E = \frac{\frac{x^2+1}{x+1}}{\frac{x^2+1}{x+1}}$$

$$E = \frac{(x^2+1)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\therefore E = 1$$

Rpta.: A

Resolución 12: Racionalizando cada denominador de las expresiones dadas:

$$I. \frac{7}{\sqrt[3]{5}+1} = \frac{7(\sqrt[3]{5}^2 - \sqrt[3]{5} + 1)}{(\sqrt[3]{5}+1)(fr)} = \frac{7(fr)}{5+1} = \frac{7fr}{6}$$

$$\Rightarrow N = 6$$

$$II. \frac{5}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}} = \frac{5(\sqrt[3]{7}^2 + \sqrt[3]{7}\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5}^2)}{(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5})(fr)} = \frac{5(fr)}{7-5} = \frac{5fr}{2}$$

$$\Rightarrow K = 2$$

Finalmente tenemos:

$$N + K = 6 + 2$$

$$\therefore N + K = 8$$

Rpta.: D

Resolución 13: Sea la fracción:

$$F = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1} \dots\dots\dots (1)$$

Factorizando el numerador:

$$N(x) \equiv x^3 + x^2 - x - 1 \equiv x^2(x+1) - (x+1)$$

$$N(x) \equiv (x+1)(x^2-1) \equiv (x+1)(x+1)(x-1)$$

$$\Rightarrow N(x) \equiv (x+1)^2(x-1)$$

Factorizando el denominador:

$$D(x) \equiv x^3 - x^2 - x + 1 \equiv x^2(x-1) - (x-1)$$

$$D(x) \equiv (x-1)(x^2-1) \equiv (x-1)(x-1)(x+1)$$

$$\Rightarrow D(x) \equiv (x-1)^2(x+1)$$

Finalmente en (1) tenemos:

$$F = \frac{(x+1)^2(x-1)}{(x-1)^2(x+1)}; x \neq 1; x \neq -1$$

$$\therefore F = \frac{x+1}{x-1}$$

Rpta.: B**Resolución 14:** Sea la expresión:

$$E = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2}}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}}$$

$$E = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{7} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})}$$

Dando uso de las equivalencias tenemos:

$$E = \frac{2(\sqrt{7})^2 + 2(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{2.7 + 2.2}{7 - 2}$$

$$E = \frac{14 + 4}{5} = \frac{18}{5} = \frac{36}{10}$$

$$\therefore E = 3,6$$

Rpta.: C

Resolución 15: Sea la expresión:

$$F = \frac{(x+y)^2 - (xy+1)^2}{x^2 - 1} \dots\dots\dots (1)$$

Factorizando el numerador:

$$N(x) \equiv (x+y)^2 - (xy+1)^2$$

$$N(x) \equiv (x+y+xy+1)(x+y-xy-1)$$

$$N(x) \equiv [(x+xy)+y+1][(x-1)+y-xy]$$

$$N(x) \equiv [(x(1+y)+(y+1))[(x-1)-y(x-1)]]$$

$$N(x) \equiv (y+1)(x+1)(x-1)(1-y)$$

Ahora en (1) tenemos:

$$F = \frac{(y+1)(x+1)(x-1)(1-y)}{(x+1)(x-1)}; \quad x \neq 1, x \neq -1$$

$$F = (y+1)(1-y) = (1+y)(1-y)$$

$$\therefore F = 1 - y^2$$

Rpta.: B

Resolución 16: Se sabe que $\sqrt{x^2} = |x|$; $\forall x \in \mathbb{R}$. En el problema tenemos:

$$E = |2 - \sqrt{5}| + |\sqrt{5} - \sqrt{7}| - |\sqrt{7} - 1|$$

De acuerdo con la definición del valor absoluto tenemos:

$$E = -(2 - \sqrt{5}) - (\sqrt{5} - \sqrt{7}) - (\sqrt{7} - 1)$$

$$E = -2 + \sqrt{5} - \sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{7} + 1$$

$$\therefore E = -1$$

Rpta.: B

Resolución 17: Sea la expresión:

$$F = \left(\frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - 4x - 5} \right) \div \left(\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 4x - 5} \right)$$

$$F = \frac{(x^3 - 7x + 6)(x^2 - 4x - 5)}{(x^2 - 4x - 5)(x^3 - 2x^2 - x + 2)}$$

Factorizando cada uno de los términos:

$$F = \frac{(x-1)(x-2)(x+3)(x-5)(x+1)}{(x-5)(x+3)(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$$

$$\therefore F = 1$$

Rpta.: B

Resolución 18: Sea la expresión:

$$E = 4x^2 + \sqrt{x^2 - x + 0,25} - 0,4375$$

$$E = 4x^2 + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{7}{16}$$

$$E = 4x^2 + \left|x - \frac{1}{2}\right| - \frac{7}{16} \quad \dots\dots\dots (1)$$

Por condición $8x - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{8}$, con lo cual es evidente que

$$x - \frac{1}{2} < 0$$

Ahora en (1) se tendrá:

$$E = 4x^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{7}{16}$$

$$E = 4x^2 - x + \frac{1}{2} - \frac{7}{16}$$

$$E = 4x^2 - x + \frac{1}{16} = \left(2x - \frac{1}{4}\right)^2$$

Extrayendo la raíz cuadrada:

$$\sqrt{E} = \sqrt{\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2} = \left|2x - \frac{1}{4}\right|$$

$$\sqrt{E} = \left| \frac{8x-1}{4} \right| = \frac{|8x-1|}{4}$$

Como $8x-1 < 0$, tenemos:

$$\sqrt{E} = \frac{-(8x-1)}{4} = -\frac{8x}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sqrt{E} = \frac{1}{4} - 2x$$

Rpta.: B

Resolución 19: Sea la expresión:

$$E = \frac{1}{1 + \frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2x+1}} + \frac{x-1}{2x}$$

$$E = \frac{x+1}{x+1+x} \cdot \frac{2x+1}{2x+1-x} + \frac{x-1}{2x}$$

$$E = \frac{x+1}{2x+1} \cdot \frac{2x+1}{x+1} + \frac{x-1}{2x}$$

1

$$E = 1 + \frac{x-1}{2x} = \frac{2x+x-1}{2x}$$

$$\therefore E = \frac{3x-1}{2x}$$

Rpta.: B

Resolución 20: Sea la expresión:

$$K = \sqrt{4 - \sqrt{15}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Multiplicando por $\sqrt{2}$ tenemos:

$$\sqrt{2}K = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$$

Transformando a radicales simples:

$$\sqrt{2K} = \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{1}$$

$$\sqrt{2K} = \sqrt{5} - \sqrt{1}$$

Expresando el segundo miembro en función de un radical doble tenemos:

$$\sqrt{2K} = \sqrt{(5+1) - 2\sqrt{5 \cdot 1}}$$

$$\sqrt{2K} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{2K} = \sqrt{2(3 - \sqrt{5})}$$

$$\sqrt{2K} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5}}$$

$$\therefore K = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$$

Rpta.: B

Resolución 21: Si "K" es el equivalente de la expresión dada, podemos reescribir así:

$$K = \underbrace{\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x+1}}_0 + \frac{1}{1 + \frac{x}{x-1}} + \frac{x-1}{1-2x}$$

$$K = \frac{x-1}{x-1+x} - \frac{x-1}{2x-1}$$

$$K = \frac{x-1}{2x-1} - \frac{x-1}{2x-1}$$

$$\therefore K = 0$$

Rpta.: C

Resolución 22: Sea la expresión

$$E = \frac{\left(\frac{x+2a}{x+a}\right)^2 - \left(\frac{x+2a}{x+a}\right) - 2}{\left(\frac{x+2a}{x+a}\right) - 2}$$

Fácilmente podemos reconocer que el numerador adopta una forma que requiere aspa simple, veamos:

$$E = \frac{\left[\left(\frac{x+2a}{x+a}\right) - 2\right] \left[\left(\frac{x+2a}{x+a}\right) + 1\right]}{\left(\frac{x+2a}{x+a}\right) - 2}$$

$$E = \frac{x+2a}{x+a} + 1 = \frac{x+2a+x+a}{x+a}$$

$$\therefore E = \frac{2x+3a}{x+a}$$

Rpta.: B

Resolución 23: Sea la expresión:

$$E = \frac{3 + \frac{12xy}{4x^2 - 2xy + y^2}}{\left(\frac{8x^3 - y^3}{8x^3 + y^3}\right) \left(\frac{2y}{y - 2x} - 1\right)}$$

$$E = \frac{\frac{12x^2 - 6xy + 3y^2 + 12xy}{4x^2 - 2xy + y^2}}{\left(\frac{8x^3 - y^3}{8x^3 + y^3}\right) \left(\frac{2y - y + 2x}{y - 2x}\right)}$$

$$E = \frac{(12x^2 + 6xy + 3y^2)(8x^3 + y^3)(y - 2x)}{(4x^2 - 2xy + y^2)(8x^3 - y^3)(y + 2x)}$$

Observa que:

$$8x^3 + y^3 = (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$$

$$8x^3 - y^3 = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$$

Ahora reemplazando y simplificando tenemos:

$$E = \frac{3(4x^2 + 2xy + y^2)(4x^2 - 2xy + y^2)(y - 2x)}{(4x^2 - 2xy + y^2)(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)}$$

$$E = \frac{3(y - 2x)}{2x - y} = \frac{-3(2x - y)}{2x - y}$$

$$\therefore E = -3$$

Rpta.: A

Resolución 24 Si "K" es el equivalente de la expresión, podemos reescribir así:

$$K = \frac{[(x + y + z) + w][(x + y + z)^2 - (x + y + z)w + w^2] - w^3}{(x + y + z)^2}$$

Fácilmente podemos reconocer que la multiplicación en el numerador origina una suma de cubos, veamos:

$$K = \frac{(x + y + z)^3 + w^3 - w^3}{(x + y + z)^2}$$

$$K = \frac{(x + y + z)^3}{(x + y + z)^2}$$

$$\therefore K = x + y + z$$

Rpta.: C

Resolución 25: Sea la expresión:

$$E = \frac{(1+ab)(1+ac)}{(a-b)(c-a)} + \frac{(1+ab)(1+bc)}{(b-a)(c-b)} + \frac{(1+ac)(1+bc)}{(c-a)(b-c)}$$

Reescribiendo el denominador de la fracción central y efectuando la multiplicación en cada numerador tenemos:

$$E = \frac{1+a(b+c)+a^2bc}{(a-b)(c-a)} + \frac{1+b(a+c)+ab^2c}{(a-b)(b-c)} + \frac{1+c(a+b)+abc^2}{(c-a)(b-c)}$$

Dando común denominador:

$$E = \frac{b-c+a(b^2-c^2)+a^2bc(b-c)+c-a+b(c^2-a^2)}{(a-b)(c-a)(b-c)} + \frac{ab^2c(c-a)+a-b+c(a^2-b^2)+ab}{(a-b)(c-a)(b-c)}$$

$$E = \frac{a(b^2-c^2)+a^2bc(b-c)+b(c^2-a^2)}{(a-b)(c-a)(b-c)} + \frac{ab^2c(c-a)+c(a^2-b^2)+abc^2(a-b)}{(a-b)(c-a)(b-c)}$$

Agrupando convenientemente en el numerador:

$$E = \frac{[a^2bc(b-c)+ab^2c(c-a)+abc^2(a-b)]+a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)}{(a-b)(c-a)(b-c)}$$

$$E = \frac{abc(ab-ac+bc-ab+ac-bc)+a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)}{(a-b)(c-a)(b-c)}$$

$$E = \frac{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)}{(a-b)(c-a)(b-c)}$$

$$E = \frac{a(b^2-c^2)+bc^2-a^2b+a^2c-b^2c}{(a-b)(c-a)(b-c)}$$

Factorizando y simplificando al factor $(b-c)$ obtenemos:

$$E = \frac{a(b+c) - bc - a^2}{(a-b)(c-a)} = \frac{ab + ac - bc - a^2}{(a-b)(c-a)}$$

$$E = \frac{(ac - bc) + ab - a^2}{(a-b)(c-a)} = \frac{c(a-b) - a(a-b)}{(a-b)(c-a)}$$

$$E = \frac{(a-b) \cdot (c-a)}{(a-b) \cdot (c-a)} ; a \neq b, a \neq c$$

$$\therefore E = 1$$

Rpta.: E

Resolución 26: Si "K" es la expresión dada, podemos reescribir así:

$$K = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{x^2 + \frac{x}{x^2 + 1}}} + \frac{x^2 - 2}{1 - \frac{1}{x^2 - \frac{x}{x^2 - 1}}}$$

Simplificando algunos denominadores:

$$K = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2 + 1}}} + \frac{x^2 - 2}{1 - \frac{1}{x^2 - \frac{1}{x^2 - 1}}}$$

$$K = \frac{x^2}{1 - \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}} + \frac{x^2 - 2}{1 - \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 - 1}}$$

$$K = \frac{x^2(x^4 + x^2 + 1)}{x^4 + x^2 + 1 - x^2 - 1} + \frac{(x^2 - 2)(x^4 - x^2 - 1)}{x^4 - x^2 - 1 - x^2 + 1}$$

$$K = \frac{x^2(x^4 + x^2 + 1)}{x^4} + \frac{(x^2 - 2)(x^4 - x^2 - 1)}{x^4 - 2x^2}$$

$$K = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} + \frac{(x^2 - 2)(x^4 - x^2 - 1)}{x^2(x^2 - 2)}$$

$$K = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} + \frac{x^4 - x^2 - 1}{x^2}$$

$$K = \frac{x^4 + x^2 + 1 + x^4 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{2x^4}{x^2}$$

$$\therefore K = 2x^2$$

Rpta.: B

Resolución 27: Sea "K" el equivalente solicitado, luego:

$$K = \frac{x^2 - (y - z)^2}{(x + z)^2 - y^2} + \frac{y^2 - (x - z)^2}{(x + y)^2 - z^2} + \frac{z^2 - (x - y)^2}{(y + z)^2 - x^2} \dots\dots\dots (1)$$

Fácilmente podemos reconocer que los términos de cada fracción se pueden simplificar según la diferencia de cuadrados

$$* \frac{x^2 - (y - z)^2}{(x + z)^2 - y^2} = \frac{(x + y - z)(x - y + z)}{(x + y + z)(x + z - y)} = \frac{x + y - z}{x + y + z}$$

$$* \frac{y^2 - (x - z)^2}{(x + y)^2 - z^2} = \frac{(y + x - z)(y - x + z)}{(x + y + z)(x + y - z)} = \frac{y - x + z}{x + y + z}$$

$$* \frac{z^2 - (x - y)^2}{(y + z)^2 - x^2} = \frac{(z + x - y)(z - x + y)}{(y + z + x)(y + z - x)} = \frac{z + x - y}{x + y + z}$$

Finalmente en (1) tenemos:

$$K = \frac{x + y + z}{x + y + z} + \frac{y - x + z}{x + y + z} + \frac{z + x - y}{x + y + z}$$

$$K = \frac{x + y - z + y - x + z + z + x - y}{x + y + z} = \frac{x + y + z}{x + y + z}$$

$$\therefore K = 1$$

Rpta.: A

Resolución 28: Supongamos que "K" es el equivalente del primer miembro, luego tenemos:

$$K = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1+a} - \frac{2a}{1+a^2} - \frac{4a^3}{1+a^4} - \frac{8a^7}{1+a^8}$$

$$K = \frac{2a}{1-a^2} - \frac{2a}{1+a^2} - \frac{4a^3}{1+a^4} - \frac{8a^7}{1+a^8}$$

$$K = \frac{4a^3}{1-a^4} - \frac{4a^3}{1+a^4} - \frac{8a^7}{1+a^8}$$

$$K = \frac{8a^7}{1-a^8} - \frac{8a^7}{1+a^8} = \frac{16a^{15}}{1-a^{16}}$$

Por condición: $m \cdot a^n \equiv 16a^{15}$. Aquí reconocemos que $m = 16 \wedge n = 15$

$$\therefore m + n = 31$$

Rpta.: B

Resolución 29: Sea "K" el equivalente del primer miembro, luego tenemos:

$$K = \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b} + \frac{a^2 - ab + b^2}{a-b} - \frac{2ab^2}{a^2 - b^2}$$

Dando común denominador obtenemos:

$$K = \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a+b)(a^2 - ab + b^2) - 2ab^2}{(a+b)(a-b)}$$

Aplicando suma y diferencia de cubos en el numerador tenemos:

$$K = \frac{a^3 - b^3 + a^3 + b^3 - 2ab^2}{a^2 - b^2}$$

$$K = \frac{2a^3 - 2ab^2}{a^2 - b^2} = \frac{2a(a^2 - b^2)}{a^2 - b^2} = 2a$$

Por condición: $m \cdot a \equiv 2a$

$$\therefore m = 2$$

Rpta.: D

Resolución 30: Se pide calcular:

$$E = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 8(ab + ac + bc)}{ab + ac + bc} \dots\dots\dots (1)$$

Por condición:

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$$

$$\frac{(b-c)(c-a) + (a-b)(c-a) + (a-b)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0$$

Siendo $a \neq b$; $b \neq c$ y $a \neq c$, tenemos:

$$(b-c)(c-a) + (a-b)(c-a) + (a-b)(b-c) = 0$$

$$bc - ab - c^2 + ac + ac - bc - a^2 + ab + ab - b^2 - ac + bc = 0$$

Reduciendo términos obtenemos:

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$$

Finalmente en (1) tenemos:

$$E = \frac{(ab + ac + bc) + 8(ab + ac + bc)}{ab + ac + bc}$$

$$E = \frac{9(ab + ac + bc)}{ab + ac + bc}$$

$$\therefore E = 9$$

Rpta.: C

Resolución 31: Si "K" es el valor pedido, podemos reescribir así:

$$K = \frac{x+y+z+1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)}$$

$$K = \frac{(x+y+z+1)(xyz)}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

Dando uso de la segunda equivalencia de Steven, el denominador se puede reescribir así:

$$K = \frac{(x + y + z + 1)(xyz)}{1 + (x + y + z) + (xy + xz + yz) + xyz} \dots\dots\dots (1)$$

Por condición:

$$x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = -1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -1$$

$$\frac{xy + xz + yz}{xyz} = -1$$

$$xy + xz + yz = -xyz$$

$$xy + xz + yz + xyz = 0 \dots\dots\dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos:

$$K = \frac{(x + y + z + 1)(xyz)}{1 + x + y + z + xy + xz + yz + xyz}$$

$$K = \frac{(x + y + z + 1)(xyz)}{1 + x + y + z}$$

$$\therefore K = xyz$$

Rpta.: A

Resolución 32: Sea "K" el valor pedido, es decir:

$$K = \frac{(a-b)^2}{ab(c^2-4ab)} + \frac{(b-c)^2}{bc(a^2-4bc)} + \frac{(c-a)^2}{ac(b^2-4ac)} \dots\dots\dots (1)$$

Por condición $a + b + c = 0$, a continuación procedemos a formar cada fracción.

$$* a + b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -b - c$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$$

$$a^2 - 4bc = b^2 + c^2 - 2bc$$

$$a^2 - 4bc = (b - c)^2 \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned}
 * a + b + c = 0 & \Rightarrow b = -a - c \\
 b^2 &= a^2 + c^2 + 2ac \\
 b^2 - 4ac &= a^2 + c^2 - 2ac \\
 b^2 - 4ac &= (c - a)^2 \dots\dots\dots (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * a + b + c = 0 & \Rightarrow c = -a - b \\
 c^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \\
 c^2 - 4ab &= a^2 + b^2 - 2ab \\
 c^2 - 4ab &= (a - b)^2 \dots\dots\dots (4)
 \end{aligned}$$

Reemplazando (2), (3) y (4) en (1):

$$K = \frac{c^2 - 4ab}{ab(c^2 - 4ab)} + \frac{a^2 - 4bc}{bc(a^2 - 4bc)} + \frac{b^2 - 4ac}{ac(b^2 - 4ac)}$$

$$K = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = \frac{c + a + b}{abc}$$

$$K = \frac{a + b + c}{abc} = \frac{0}{abc}$$

$$\therefore K = 0$$

Rpta.: C

Resolución 33: Se pide calcular "K", donde:

$$K = \frac{(2a + b + c)(a + 3b + c)(a + b + 4c)}{abc} \dots\dots\dots (1)$$

Por condición tenemos:

$$\frac{(a + b + c)^2}{ab + ac + bc} = 3$$

$$(a + b + c)^2 = 3(ab + ac + bc)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 3(ab + ac + bc)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$$

Por implicancia notable (Capítulo de Productos Notables) se cumple que:

$a = b = c$. Finalmente en (1) tenemos:

$$K = \frac{(4a)(5b)(6c)}{abc} = \frac{120abc}{abc}$$

$$\therefore K = 120$$

Rpta.: B

Resolución 34: Factorizando el denominador de la fracción, según el criterio de los divisores binómicos.

$$D(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

	1	-2	-5	6
$x = 1$	↓	1	-1	-6
	1	-1	-6	0
$x = -2$	↓	-2	6	
	1	-3	0	

$$\Rightarrow D(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$$

Ahora la fracción dada es:

$$\frac{10x^2 - 6x - 22}{(x - 1)(x + 2)(x - 3)}$$

Y según la teoría se plantea:

$$\frac{10x^2 - 6x - 22}{(x - 1)(x + 2)(x - 3)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 2} + \frac{c}{x - 3}$$

$$\frac{10x^2 - 6x - 22}{(x - 1)(x + 2)(x - 3)} = \frac{a(x + 2)(x - 3) + b(x - 1)(x - 3) + c(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 2)(x - 3)}$$

Rpta.: B

De la igualdad de fracciones se cumple que:

$$10x^2 - 6x - 22 \equiv a(x+2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)(x+2)$$

Por ser identidad podemos utilizar el criterio del valor numérico, veamos:

$$\text{I. Si } x = 1 \Rightarrow 10 - 6 - 22 = a(3)(-2)$$

$$-18 = -6a$$

$$a = 3$$

$$\text{II. Si } x = -2 \Rightarrow 40 + 12 - 22 = b(-3)(-5)$$

$$30 = 15b$$

$$b = 2$$

$$\text{III. Si } x = 3 \Rightarrow 90 - 18 - 22 = c(2)(5)$$

$$50 = 10c$$

$$c = 5$$

$$\therefore a + b + c = 10$$

Rpta.: B

Resolución 35:

La fracción dada es:

$$\frac{x+3}{x^2+2x+1} = \frac{x+3}{(x+1)^2}$$

Según la teoría se plantea que:

$$\frac{x+3}{(x+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$$

$$\frac{x+3}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)+b}{(x+1)^2}$$

$$\text{Ahora se cumple que: } x+3 \equiv a(x+1)+b$$

$$x+3 \equiv ax+(a+b)$$

Fácilmente reconocemos que

$$a = 1 \wedge b = 2$$

$$\therefore a \cdot b = 2$$

Rpta.: C

Resolución 36: La fracción dada es:

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

Y según la teoría se plantea que:

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1}$$

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

Ahora se cumple que:

$$2x^2 + 5x - 1 \equiv a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x - 1)$$

$$2x^2 + 5x - 1 \equiv (a + b)x^2 + (a - b + c)x + (a - c)$$

$$a + b = 2 \wedge a - b + c = 5 \wedge a - c = -1$$

$$\text{Resolviendo : } a = 2 \wedge b = 0 \wedge c = 3$$

Finalmente tenemos:

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{2}{x - 1} + \frac{3}{x^2 + x + 1}$$

$$\therefore \Sigma \text{ de numeradores} = 5$$

Rpta.: E**Resolución 37:** Por condición se plantea que:

$$\frac{5x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$$

$$\frac{5x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{a(x^2 + 1) + (bx + c)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + 1)}$$

$$5x^2 - 2x + 1 \equiv a(x^2 + 1) + (bx + c)(x - 1)$$

Para $x = 1$: $5 - 2 + 1 = a(2)$
 $4 = 2a$
 $a = 2$

Para $x = 0$: $0 - 0 + 1 = a(1) + (0 + c)(-1)$
 $1 = 2 - c$
 $c = 1$

Para $x = -1$: $5 + 2 + 1 = a(2) + (-b + c)(-2)$
 $8 = 4 + 2b - 2$
 $6 = 2b$
 $b = 3$

Finalmente tenemos: $ab - c = (2)(3) - 1 = 6 - 1$
 $\therefore ab - c = 5$

Rpta.: A

Resolución 38: Se pide calcular:

$$T = \frac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{ax + by + cz} \dots\dots\dots (1)$$

Por condición:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \begin{cases} x = ak \\ y = bk \\ z = ck \end{cases}$$

Reemplazando en (1) tenemos:

$$T = \frac{a^2k + b^2k + c^2k}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{a^2k^2 + b^2k^2 + c^2k^2}{a^2k + b^2k + c^2k}$$

$$T = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)k}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{k^2(a^2 + b^2 + c^2)}{k(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$T = k - \frac{k^2}{k} = k - k$$

$$\therefore T = 0$$

Rpta.: B

Resolución 39: Se pide calcular el valor de:

$$E = \frac{(x+w)(y+z)}{x+y+z+w} - \frac{xy}{x+y} - \frac{wz}{w+z} \dots\dots\dots (1)$$

Por condición tenemos:

$$\frac{x}{y} = \frac{w}{z} \begin{matrix} \nearrow x = kw \\ \searrow y = kz \end{matrix}$$

Reemplazando en (1) tenemos:

$$E = \frac{(kw+w)(kz+z)}{kw+kz+z+w} - \frac{k^2wz}{kw+kz} - \frac{wz}{w+z}$$

$$E = \frac{wz(k+1)^2}{(k+1)w+(k+1)z} - \frac{k^2wz}{k(w+z)} - \frac{wz}{w+z}$$

$$E = \frac{wz(k+1)}{w+z} - \frac{kwz}{w+z} - \frac{wz}{w+z}$$

$$E = \frac{kwz+wz}{w+z} - \frac{kwz+wz}{w+z}$$

$$\therefore E = 0$$

Rpta.: A

Resolución 40: De $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = K \dots\dots\dots (1)$

tenemos que : $a = xK, b = yK \wedge c = zK$

Reemplazando en : $\frac{ac}{xz} + \frac{2(3b+5c)}{3y+5z} + \frac{ay\sqrt[3]{bz}}{bx\sqrt[3]{cy}} = 16 \dots\dots\dots (2)$

conseguimos : $\frac{xzK^2}{xz} + \frac{2(3Ky+5Kz)}{3y+5z} + \frac{xyK\sqrt[3]{yzK}}{xyK\sqrt[3]{yzK}} = 16$

Simplificando obtenemos:

$$K^2 + 2K + 1 = 16$$

$$(K+1)^2 = 16$$

$$K+1 = 4$$

$$\therefore K = 3$$

Rpta.: C

Resolución 41: De (1) tenemos:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Rightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{x_3}{y_3} = \frac{x_4}{y_4} \Rightarrow x_3 y_4 = x_4 y_3 \dots\dots\dots (5)$$

Multiplcando (4) y (5) tenemos:

$$x_1 y_2 x_3 y_4 = x_2 y_1 x_4 y_3 \dots\dots\dots (6)$$

Reemplazando (2) y (3) en (6):

$$216 = 54 x_4$$

$$\therefore x_4 = 4$$

Rpta.: C

Resolución 42: Por condición tenemos:

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{35} = \frac{\sqrt{4+y^2}}{70} = \frac{\sqrt{9+z^2}}{105}$$

Simplificando denominadores obtenemos:

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{\sqrt{4+y^2}}{2} = \frac{\sqrt{9+z^2}}{3}$$

Elevando al cuadrado tenemos:

$$1 + x^2 = \frac{4 + y^2}{4} = \frac{9 + z^2}{9}$$

$$1 + x^2 = 1 + \frac{y^2}{4} = 1 + \frac{z^2}{9}$$

$$x^2 = \frac{y^2}{4} = \frac{z^2}{9}$$

$$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

Igualando con una constante:

$$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = K$$

Tenemos: $x = K, y = 2K \wedge z = 3K$

Por condición tenemos que:

$$x + y + z = 6$$

$$K + 2K + 3K = 6$$

$$6K = 6$$

$$K = 1$$

Finalmente tenemos que: $x = 1, y = 2 \wedge z = 3$

$$\therefore xyz = 6$$

Rpta.: E

Resolución 43: Sea "K" el equivalente, es decir:

$$K = \sqrt{\frac{xy + xz + yz}{x + y + z}} \dots\dots\dots (1)$$

Por condición tenemos:

$$\frac{x^2 - yz}{x - 1} = \frac{y^2 - xz}{y - 1} = \frac{z^2 - xy}{z - 1}$$

Por propiedad de razones iguales:

$$\frac{x^2 - yz - (y^2 - xz)}{x - 1 - (y - 1)} = \frac{z^2 - xy}{z - 1}$$

$$\frac{x^2 - y^2 + xz - yz}{x - y} = \frac{z^2 - xy}{z - 1}$$

$$\frac{(x + y)(x - y) + z(x - y)}{x - y} = \frac{z^2 - xy}{z - 1}$$

Factorizando y simplificando al factor $(x - y)$ en la primera fracción, obtenemos:

$$x + y + z = \frac{z^2 - xy}{z - 1}$$

$$xz + yz + z^2 - x - y - z = z^2 - xy$$

$$y + xz + yz = x + y + z \dots\dots\dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1). Tenemos:

$$K = \sqrt{\frac{x + y + z}{x + y + z}} = \sqrt{1}$$

$$\therefore K = 1$$

Rpta.: A

Resolución 44: Supongamos que cada fracción es igual con "K", luego se cumple que:

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = -\frac{xz - y^2}{1 - y} = K$$

Por propiedad se plantea que:

$$\frac{yz - x^2 - (xz - y^2)}{1 - x - (1 - y)} = K$$

$$\frac{yz - x^2 - xz + y^2}{1 - x - 1 + y} = K$$

$$\frac{yz - xz + y^2 - x^2}{y - x} = K$$

Factorizando en el numerador tenemos:

$$\frac{(y - x)z + (y + x)(y - x)}{y - x} = K$$

$$\frac{(y - x)(z + y + x)}{y - x} = K$$

$$\therefore K = x + y + z$$

Rpta.: B

Resolución 45: Como la fracción es de valor constante según la teoría se plantea que:

$$\frac{a+2}{4} = \frac{6}{b-1} = \frac{12}{b+3}$$

$$* \frac{6}{b-1} = \frac{12}{b+3} \Rightarrow b+3 = 2(b-1)$$

$$b+3 = 2b-2$$

$$5 = b$$

$$* \frac{a+2}{4} = \frac{6}{b-1} \Leftrightarrow \frac{a+2}{4} = \frac{6}{4}$$

$$a+2 = 6$$

$$a = 4$$

$$\therefore a+b = 9$$

Rpta.: D

Resolución 46: Sea la expresión:

$$F = \frac{x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1}$$

Factorizando cada término de la fracción según el criterio del aspa doble obtenemos:

$$F = \frac{(x^2 - x + 1)(x^2 + 3x + 1)}{(x^2 - x + 1)(x^2 - 3x + 1)}$$

$$\therefore F = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - 3x + 1}$$

Rpta.: A

Resolución 47: Un criterio práctico, pero muy eficaz, para encontrar el máximo común divisor de dos polinomios de igual grado y de igual coeficiente principal consiste en restar ambos polinomios para originar un nuevo polinomio que necesariamente debe contener (si es que no lo es) al máximo común divisor de los mencionados.

En nuestro caso tenemos:

$$F = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 + x^2 + x + 1} \dots\dots\dots (1)$$

Observa que:

$$N(x) \equiv x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$D(x) \equiv x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow N(x) - D(x) \equiv x^2 - 2x - 3$$

$$N(x) - D(x) \equiv (x - 3)(x + 1)$$

Dando uso de los criterios de divisibilidad reconocemos que $(x + 1)$ es el MCD de $N(x)$ y $D(x)$

I. Se plantea:
$$\frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x + 1}$$

	1	2	-1	-2
$x = -1$	↓	-1	-1	2
	1	1	-2	0

$$\Rightarrow N(x) \equiv (x+1)(x^2+x-2)$$

II. Se plantea: $\frac{x^3+x^2+x+1}{x+1}$

	1	1	1	1
$x = -1$	↓	-1	0	-1
	1	0	1	0

$$\Rightarrow D(x) \equiv (x+1)(x^2+1)$$

Finalmente en (1) tenemos:

$$F = \frac{(x+1)(x^2+x-2)}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\therefore F = \frac{x^2+x-2}{x^2+1}$$

Rpta.: D

Resolución 48: La fracción dada es:

$$\frac{3x^3 - 2x^2 - (a+2)x - 6}{3x^3 - 5x^2 - (a-1)x - b}$$

De acuerdo con la resolución del problema anterior podemos reconocer que el divisor común de $N(x)$ y $D(x)$ se encuentra contenido en $N(x) - D(x)$

$$N(x) \equiv 3x^3 - 2x^2 - (a+2)x - 6$$

$$D(x) \equiv 3x^3 - 5x^2 - (a-1)x - b$$

$$N(x) - D(x) \equiv 3x^2 + (a-1-a-2)x - 6 - b$$

$$N(x) - D(x) \equiv 3x^2 - 3x - 6 - b$$

$$N(x) - D(x) \equiv 3\left(x^2 - x - \frac{6+b}{3}\right)$$

Por condición se plantea que:

$$x^2 - x - \frac{6+b}{3} = x^2 + mx - 6$$

Aquí se cumple que:

$$-1 = m \wedge \frac{6+b}{3} = 6$$

$$-m = 1 \wedge 6+b = 18$$

$$m = -1 \wedge b = 12$$

$$\therefore m + b = 11$$

Rpta.: C

Resolución 49: Supongamos que se pide $\frac{N}{D}$, donde :

$$I. N = a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \dots}}}$$

$$II. D = b + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \dots}}}$$

Por artificio en (I): $N = a + \frac{1}{D}$
 $ND = aD + 1 \dots\dots\dots (1)$

Por artificio en (II): $D = b + \frac{1}{N}$
 $ND = bN + 1 \dots\dots\dots (2)$

Igualando (1) y (2): $aD + 1 = bN + 1$
 $aD = bN$
 $bN = aD$
 $\therefore \frac{N}{D} = \frac{a}{b}$

Rpta.: A

Resolución 50: Sea "F" la fracción, luego según el criterio inductivo procedemos de la manera siguiente:

$$* \text{ Si } n = 1 \quad \Rightarrow F = \frac{a}{a+1} = \frac{a(a^1 - 1)}{a^2 - 1}$$

$$* \text{ Si } n = 2 \quad \Rightarrow F = \frac{a}{a+1 - \frac{a}{a+1}} = \frac{a(a+1)}{a^2 + a + 1}$$

$$F = \frac{a(a+1)(a-1)}{(a^2 + a + 1)(a-1)} = \frac{a(a^2 - 1)}{a^3 - 1}$$

$$* \text{ Si } n = 3 \quad \Rightarrow F = \frac{a}{a+1 - \frac{a}{a+1 - \frac{a}{a+1}}}$$

$$F = \frac{a}{a+1 - \frac{a(a+1)}{a^2 + a + 1}}$$

$$F = \frac{a(a^2 + a + 1)}{a^3 + a^2 + a + 1}$$

$$F = \frac{a(a^2 + a + 1)(a-1)}{(a^3 + a^2 + a + 1)(a-1)}$$

$$F = \frac{a(a^3 - 1)}{a^4 - 1}$$

Una minuciosa inspección a los resultados obtenidos cuando $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$ permite generalizar la forma final de la fracción F.

$$\therefore F = \frac{a(a^n - 1)}{a^{n+1} - 1} ; n \in \mathbb{Z}^+$$

Rpta.: C

Resolución 51: Se pide calcular:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{(b^2 - c^2)^2}{(b^2 + c^2)^2} + \frac{(c^2 - a^2)^2}{(c^2 + a^2)^2}$$

Por condición tenemos:

$$\frac{a^4 + b^4}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^4 + c^4}{(b^2 + c^2)^2} + \frac{a^4 + c^4}{(a^2 + c^2)^2} = 4$$

Multiplicando por 2 tenemos:

$$\frac{2(a^4 + b^4)}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{2(b^4 + c^4)}{(b^2 + c^2)^2} + \frac{2(a^4 + c^4)}{(a^2 + c^2)^2} = 8$$

Reemplazando cada numerador según la equivalencia de Legendre

$$\frac{(a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{(b^2 + c^2)^2 + (b^2 - c^2)^2}{(b^2 + c^2)^2} + \frac{(a^2 + c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2}{(a^2 + c^2)^2} = 8$$

Separando términos en cada fracción tenemos:

$$1 + \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} + 1 + \frac{(b^2 - c^2)^2}{(b^2 + c^2)^2} + 1 + \frac{(c^2 - a^2)^2}{(c^2 + a^2)^2} = 8$$

Aquí reconocemos que:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 + 1 + 1 = 8$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 = 8$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 5$$

Rpta.: E

Resolución 52: Sea "K" el equivalente solicitado, luego

$$K = \frac{y}{xz(x+y)} + \frac{z}{xy(y+z)} + \frac{x}{yz(x+z)}$$

Multiplicando por $2xyz$:

$$2xyzK = \frac{2y^2}{x+y} + \frac{2z^2}{y+z} + \frac{2x^2}{x+z} \dots\dots\dots (1)$$

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 05

Por condición tenemos:

$$xyz = \frac{x^2 + y^2}{x + y} + \frac{y^2 + z^2}{y + z} + \frac{z^2 + x^2}{x + z} \dots\dots\dots (2)$$

Efectuando (1) - (2):

$$2xyzK - xyz = \frac{y^2 - x^2}{x + y} + \frac{z^2 - y^2}{y + z} + \frac{x^2 - z^2}{x + z}$$

Dando uso de la diferencia de cuadrados en cada numerador, obtenemos:

$$2xyzK - xyz = y - x + z - y + x - z$$

$$2xyzK - xyz = 0$$

$$2xyzK = xyz$$

$$2K = 1$$

$$\therefore K = \frac{1}{2}$$

Rpta.: B

Resolución 53: La expresión dada es:

$$P(x) = \frac{mx + 1}{x - 4}$$

Reemplazando x por $P(x)$:

$$P(P(x)) = \frac{mP(x) + 1}{P(x) - 4}$$

$$P(P(x)) = \frac{m\left(\frac{mx + 1}{x - 4}\right) + 1}{\frac{mx + 1}{x - 4} - 4}$$

$$P(P(x)) = \frac{m^2x + m + x - 4}{mx + 1 - 4x + 16}$$

$$P(P(x)) = \frac{(m^2 + 1)x + (m - 4)}{(m - 4)x + 17}$$

De acuerdo con la teoría se cumple que:

$$\frac{m^2 + 1}{m - 4} = \frac{m - 4}{17}$$

$$17(m^2 + 1) = (m - 4)^2$$

$$17m^2 + 17 = m^2 - 8m + 16$$

$$16m^2 + 8m + 1 = 0$$

$$(4m + 1)^2 = 0$$

$$4m + 1 = 0$$

$$4m = -1$$

$$\therefore m = -\frac{1}{4}$$

Rpta.: D

Resolución 54: Sea la expresión:

$$E = \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^3 - \sqrt{2}^3 - \sqrt{3}^3 - \sqrt{5}^3}$$

Desarrollando el trinomio al cubo, el denominador se transforma en:

$$E = \frac{1}{3(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{3})}$$

Racionalizando tenemos:

$$E = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{3(3 - 2)(5 - 2)(5 - 3)}$$

$$E = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{3(1)(3)(2)}$$

$$E = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{18}$$

$\therefore$ El denominador es 18

Rpta.: C

Resolución 55: Siendo "E" la expresión dada, podemos reescribir así:

$$E = \frac{3}{\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{b-c} + \sqrt[3]{c-a}}$$

Recordemos la equivalencia de Gauss

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$

Racionalizando el denominador:

$$\frac{3 \left[(\sqrt[3]{a-b})^2 + (\sqrt[3]{b-c})^2 + (\sqrt[3]{c-a})^2 - \sqrt[3]{(a-b)(b-c)} - \sqrt[3]{(a-b)(c-a)} - \sqrt[3]{(b-c)(c-a)} \right]}{(\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{b-c} + \sqrt[3]{c-a}) \cdot fr}$$

$$E = \frac{3fr}{(\sqrt[3]{a-b})^3 + (\sqrt[3]{b-c})^3 + (\sqrt[3]{c-a})^3 - 3(\sqrt[3]{a-b})(\sqrt[3]{b-c})(\sqrt[3]{c-a})}$$

$$E = \frac{3fr}{\underbrace{a-b + b-c + c-a}_{0} - 3\sqrt[3]{(a-b)(b-c)(c-a)}}$$

$$E = \frac{-fr}{\sqrt[3]{(a-b)(b-c)(c-a)}} = \frac{(fr)(FR)}{\sqrt[3]{(a-b)(b-c)(c-a)}(FR)}$$

$$E = \frac{\text{Factorracionalizante}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$\therefore$ N° de factores lineales = 3

Rpta.: C

Resolución 56: Supongamos que "K" es el equivalente de la expresión dada, luego tenemos:

$$K = (\sqrt[4]{27} - \sqrt[4]{3}) \cdot \sqrt{6 + 4\sqrt{3}}$$

$$K = \sqrt[4]{3}(\sqrt[4]{3^2} - 1) \cdot \sqrt{\sqrt{3}(4 + 2\sqrt{3})}$$

$$K = \sqrt[4]{3}(\sqrt{3} - 1) \cdot \underbrace{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}$$

$$K = (\sqrt[4]{3})^2 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot (\sqrt{3} + 1)$$

$$K = \sqrt{3} \cdot (3 - 1) = \sqrt{3} \cdot 2$$

$$\therefore K = 2\sqrt{3}$$

Rpta.: D

Resolución 57: Sea la expresión:

$$E = (x + 1)^2 - 2 \left[x + \sqrt{x^2 - x - 6} + \frac{1}{2} \right] - (x - 1)^2$$

$$E = \underbrace{(x + 1)^2 - (x - 1)^2} - 2x - 2\sqrt{x^2 - x - 6} - 1$$

$$E = 4x - 2x - 2\sqrt{x^2 - x - 6} - 1$$

$$E = 2x - 1 - 2\sqrt{(x - 3)(x + 2)}$$

Extrayendo raíz cuadrada:

$$\sqrt{E} = \sqrt{2x - 1 - 2\sqrt{(x - 3)(x + 2)}}$$

$$\therefore \sqrt{E} = \sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 3}$$

Rpta.: E

Resolución 58: Sea la expresión:

$$E = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} \cdot \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}} \dots\dots\dots (1)$$

Una minuciosa inspección permite reconocer que:

$$3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2 \wedge 5\sqrt{2} - 7 = (\sqrt{2} - 1)^3$$

Ahora en (1) tenemos:

$$E = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[8]{(\sqrt{2}+1)^2}}{\sqrt[6]{\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt[12]{(\sqrt{2}-1)^3}}$$

$$E = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[6]{\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{2}-1}}$$

$$E = \frac{(2^4\sqrt[4]{\sqrt{2}-1})^8 \cdot (2^4\sqrt[4]{\sqrt{2}+1})^6}{(2^4\sqrt[4]{\sqrt{2}+1})^4 \cdot (2^4\sqrt[4]{\sqrt{2}-1})^6}$$

$$E = (2^4\sqrt[4]{\sqrt{2}-1})^2 \cdot (2^4\sqrt[4]{\sqrt{2}+1})^2$$

$$E = 12\sqrt[4]{\sqrt{2}-1} \cdot 12\sqrt[4]{\sqrt{2}+1}$$

$$E = 12\sqrt[4]{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$E = 12\sqrt[4]{(\sqrt{2})^2 - (1)^2} = 12\sqrt[4]{2-1} = 12\sqrt[4]{1}$$

$$\therefore E = 1$$

Rpta.: E

Resolución 59: Sea la expresión:

$$E = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$E = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3})} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{3})} + \frac{3-2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}$$

$$E = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{4} + 2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{4} - 2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$E = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{3} + 1} - \frac{\sqrt{2}}{2 - (\sqrt{3} - 1)} + \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$E = \frac{\sqrt{2}}{3 + \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3 - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$E = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6} - 3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} + \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$E = \frac{-2\sqrt{6}}{9 - 3} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6 \cdot 6}}$$

$$E = \frac{-2\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\therefore E = -\frac{\sqrt{6}}{6}$$

Rpta.: C

Resolución 60: Sea la expresión:

$$E = \frac{8}{\sqrt{2} + (\sqrt{3} - 1)} + \frac{12}{\sqrt{2} - (\sqrt{3} - 1)}$$

$$E = \frac{8\sqrt{2} - 8(\sqrt{3} - 1) + 12\sqrt{2} + 12(\sqrt{3} - 1)}{[\sqrt{2} + (\sqrt{3} - 1)][\sqrt{2} - (\sqrt{3} - 1)]}$$

$$E = \frac{20\sqrt{2} - 8\sqrt{3} + 8 + 12\sqrt{3} - 12}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} - 1)^2}$$

$$E = \frac{20\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 4}{2 - (4 - 2\sqrt{3})} = \frac{20\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{3} - 2}$$

$$E = \frac{10\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2(5\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$$

$$E = \frac{2(5\sqrt{6} + 5\sqrt{2} + 3 + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1)}{3 - 1}$$

$$E = \frac{2(5\sqrt{6} + 5\sqrt{2} + 2)}{2}$$

$$\therefore E = 5\sqrt{6} + 5\sqrt{2} + 2$$

Rpta.: E

Resolución 61: Sea la expresión:

$$E = \frac{24x^4y^3}{\sqrt[5]{120x^2y^7}} = \frac{24x^4y^3}{\sqrt[5]{5 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot x^2 \cdot y^5 \cdot y^2}}$$

$$E = \frac{24x^4y^3\sqrt[5]{5^4 \cdot 3^4 \cdot 2^2 \cdot x^3 \cdot y^3}}{y\sqrt[5]{5 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot x^2 \cdot y^2}(\text{fr})}$$

$$E = \frac{24x^4y^3(\text{fr})}{\sqrt[5]{5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x \cdot y}} = \frac{4x^3y(\text{fr})}{5}$$

$\therefore$ El denominador es 5

Rpta.: A

Resolución 62: Se tiene:

$$E = \sqrt{5x + 16y + 1 - \sqrt{240xy + 192y^2 + 192y - 48y - 60x - 48}}$$

$$E = \sqrt{5x + 16y + 1 - \sqrt{240xy + 192y^2 + 144y - 60x - 48}}$$

$$E = \sqrt{5x + 16y + 1 - \sqrt{4(60xy + 48y^2 + 36y - 15x - 12)}}$$

$$E = \sqrt{5x + 16y + 1 - 2\sqrt{60xy + 48y^2 + 36y - 15x - 12}}$$

$$E = \sqrt{5x + 16y + 1 - 2\sqrt{0x^2 + 60xy + 48y^2 - 15x + 36y - 12}}$$

$$E = \sqrt{5x + 16y + 1 - 2\sqrt{(12y - 3)(5x + 4y + 4)}}$$

$$\therefore E = \sqrt{5x + 4y + 4} - \sqrt{12y - 3}$$

Rpta.: C

Resolución 63: Se tiene:

$$T = \frac{3}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

Racionalizando en cada fracción tenemos:

$$T = \frac{3(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})}{12 - 18} + \frac{5(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})}{2 - 12} + \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3 - 2}$$

$$T = \frac{3(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})}{-6} + \frac{5(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})}{-10} + \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{1}$$

$$T = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{-2} + \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{-2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

$$T = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{-2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

$$T = \frac{4\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}{-2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

$$T = -2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

$$\therefore T = 0$$

Rpta.: E

Resolución 64: Se tiene:

$$E = \left(\frac{\sqrt[3]{11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{97 + 56\sqrt{3}}} \right)^{2/3} \dots\dots\dots (1)$$

Observa que:

$$11\sqrt{2} + 9\sqrt{3} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^3$$

$$20 - 14\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})^3$$

Asimismo que :

$$\sqrt[4]{97 + 56\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{97 + 2\sqrt{48.49}}}$$

$$\sqrt[4]{97 + 56\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{49} + \sqrt{48}}$$

$$\sqrt[4]{97 + 56\sqrt{3}} = \sqrt{7 + 2\sqrt{12}}$$

$$\sqrt[4]{97 + 56\sqrt{3}} = \sqrt{4 + \sqrt{3}}$$

$$\sqrt[4]{97 + 56\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

Finalmente en (1) se tendrá:

$$E = \left[\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3}}{2 + \sqrt{3}} \right]^{2/3}$$

$$E = \left[\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3}}{2 + \sqrt{3}} \right]^{2/3}$$

$$E = \left[\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{3}} \right]^{2/3} = \left(\frac{\sqrt{3} + 2}{2 + \sqrt{3}} \right)^{2/3} = (1)^{2/3}$$

$$\therefore E = 1$$

Rpta.: B

Resolución 65: Se tiene la expresión:

$$K = \sqrt{7 + 2\sqrt{12}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{12}}$$

$$K = \sqrt{7 + 2\sqrt{4 \cdot 3}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{4 \cdot 3}}$$

Transformando a radicales simples:

$$K = \sqrt{4} + \sqrt{3} + \sqrt{4} - \sqrt{3}$$

$$K = \sqrt{4} + \sqrt{4} = 2 + 2$$

$$\therefore K = 4$$

Rpta.: D

Resolución 66: La equivalencia dada es:

$$\sqrt{10} \cdot \left[\frac{\sqrt{\sqrt{10} + 3} + \sqrt{\sqrt{10} - 3}}{\sqrt{\sqrt{10} + 1} + \sqrt{\sqrt{10} - 1}} \right] <> \alpha\sqrt{\theta} - \theta\sqrt{\alpha}$$

Supongamos que :

$$K = \frac{\sqrt{\sqrt{10} + 3} + \sqrt{\sqrt{10} - 3}}{\sqrt{\sqrt{10} + 1} + \sqrt{\sqrt{10} - 1}}$$

Elevando al cuadrado: $K^2 = \frac{2\sqrt{10} + 2\sqrt{(\sqrt{10})^2 - 3^2}}{2\sqrt{10} + 2\sqrt{(\sqrt{10})^2 - 1^2}}$

$$K^2 = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{1}}{\sqrt{10} + \sqrt{9}} = \frac{\sqrt{10} + 1}{\sqrt{10} + 3}$$

$$K^2 = \frac{(\sqrt{10} + 1)(\sqrt{10} - 3)}{(\sqrt{10} + 3)(\sqrt{10} - 3)}$$

$$K^2 = \frac{10 - 3\sqrt{10} + \sqrt{10} - 3}{10 - 9}$$

$$K = \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{5 \cdot 2}}$$

$$K = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

Finalmente en la equivalencia:

$$\sqrt{10}[\sqrt{5} - \sqrt{2}] <> \alpha\sqrt{\theta} - \theta\sqrt{\alpha}$$

$$\sqrt{50} - \sqrt{20} <> \alpha\sqrt{\theta} - \theta\sqrt{\alpha}$$

$$5\sqrt{2} - 2\sqrt{5} <> \alpha\sqrt{\theta} - \theta\sqrt{\alpha}$$

Aquí reconocemos que:

$$\alpha = 5 \wedge \theta = 2$$

$$\therefore \alpha \cdot \theta = 10$$

Rpta.: D

Resolución 67: Sea la expresión:

$$E = \frac{2(\sqrt{15} - \sqrt{7})}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}} = \frac{2(\sqrt{15} - \sqrt{7})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3}) + (\sqrt{7} + 1)}$$

Racionalizando el denominador:

$$E = \frac{2(\sqrt{15} - \sqrt{7})[(\sqrt{5} + \sqrt{3}) - (\sqrt{7} + 1)]}{[(\sqrt{5} + \sqrt{3}) + (\sqrt{7} + 1)] \cdot (\text{fr})}$$

$$E = \frac{2(\sqrt{15} - \sqrt{7})(\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{7} - 1)}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{7} + 1)^2}$$

$$E = \frac{2(\sqrt{15} - \sqrt{7})(\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{7} - 1)}{8 + 2\sqrt{15} - 8 - 2\sqrt{7}}$$

$$E = \frac{2(\sqrt{15} - \sqrt{7})(\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{7} - 1)}{2(\sqrt{15} - \sqrt{7})}$$

$$\therefore E = \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{7} - 1$$

Rpta.: D

Resolución 68: Sea la expresión:

$$E = \frac{1}{\sqrt{x}(y-z) + \sqrt{y}(z-x) + \sqrt{z}(x-y)} \dots\dots\dots (1)$$

En el denominador tenemos:

$$D = \sqrt{x}(y-z) + \sqrt{y}(z-x) + \sqrt{z}(x-y)$$

$$D = \sqrt{xy} - \sqrt{xz} + \sqrt{yz} - x\sqrt{y} + \sqrt{z}(x-y)$$

$$D = \sqrt{xy} - x\sqrt{y} - \sqrt{xz} + \sqrt{yz} + \sqrt{z}(x-y)$$

$$D = \sqrt{x}\sqrt{y}(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + z(\sqrt{y} - \sqrt{x}) - \sqrt{z}(x-y)$$

$$D = (\sqrt{y} - \sqrt{x})[\sqrt{x}\sqrt{y} + z - \sqrt{z}(\sqrt{y} + \sqrt{x})]$$

$$D = (\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{x}\sqrt{y} + z - \sqrt{y}\sqrt{z} - \sqrt{x}\sqrt{z})$$

$$D = (\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{x}\sqrt{y} - \sqrt{x}\sqrt{z} + z - \sqrt{y}\sqrt{z})$$

$$D = (\sqrt{y} - \sqrt{x})[\sqrt{x}(\sqrt{y} - \sqrt{z}) - \sqrt{z}(\sqrt{y} - \sqrt{z})]$$

$$D = (\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{x} - \sqrt{z})$$

Cambio de signo

$$D = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{z} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{z}) \dots\dots\dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos:

$$E = \frac{1}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{z} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{z})}$$

Finalmente racionalizando obtenemos:

$$E = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{z} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{z})}{(x-y)(z-y)(x-z)}$$

$$\therefore \text{Denominador racional} = (x-y)(z-y)(x-z)$$

Rpta.: A

Resolución 69: Supongamos que "K" es el equivalente, luego se tendrá

$$K = \frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}} + \frac{4}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}$$

$$K = \frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{5 \cdot 2}}} + \frac{4}{\sqrt{8+2\sqrt{6 \cdot 2}}} + \frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{6 \cdot 5}}}$$

Transformando cada denominador en radicales simples:

$$K = \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$$

Racionalizando cada denominador:

$$K = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} + \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{6-5}$$

$$K = (\sqrt{5}+\sqrt{2}) + (\sqrt{6}-\sqrt{2}) - \sqrt{6} + \sqrt{5}$$

$$K = \sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

$$\therefore K = 0$$

Rpta.: B

Resolución 70: Sea "K" el equivalente, luego se tendrá:

$$K = \left(1 + \sqrt[4]{1 + \sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} \right)^{(1+\sqrt{2})^{\sqrt{2}+1}}$$

observa que $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$, ahora tenemos

$$K = \left(1 + \sqrt[4]{1 + \sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} \right)^{(1+\sqrt{2})^{\sqrt{2}+1}}$$

$$K = \left[\left(\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} \right)^{\sqrt{2}+1} \sqrt{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} \right]^{(1+\sqrt{2})^{\sqrt{2}-1}}$$

$$K = \left\{ \left[\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} \right]^{\sqrt{2}+1} \sqrt{\sqrt{3+2\sqrt{2} \cdot 1}} \right\}^{(1+\sqrt{2})^{\sqrt{2}-1}}$$

$$K = \left\{ (1+\sqrt{2})^{\sqrt{2}+1} \sqrt{\sqrt{2}+1} \right\}^{(1+\sqrt{2})^{\sqrt{2}-1}}$$

$$K = \left\{ \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} \right\} = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$$

$$\therefore K = \sqrt{2} + 1$$

Rpta.: B

Resolución 71: Sea la expresión:

$$E = \frac{\sqrt[3]{xy} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x+y}}$$

Dando uso del factor racionalizante tenemos:

$$E = \frac{\sqrt[3]{xy} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) (\text{fr})}{\left[(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) - \sqrt[3]{x+y} \right] (\text{fr})}$$

$$E = \frac{\sqrt[3]{xy} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) (\text{fr})}{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3 - (x+y)}$$

$$E = \frac{\sqrt[3]{xy} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) (\text{fr})}{3 \sqrt[3]{xy} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})} = \frac{\text{fr}}{3}$$

$\therefore$ Denominador racionalizado = 3

Rpta.: A

Resolución 72: Sea la expresión:

$$E = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{x\sqrt[3]{x^2} + x\sqrt[3]{x} + 1}$$

$$E = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{x^4} + 1}$$

Recordemos que:

$$a^5 + a^4 + 1 \equiv (a^2 + a + 1)(a^3 - a + 1)$$

Ahora en el denominador de nuestra expresión se tendrá:

$$E = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}$$

$$E = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)[(x+1) - \sqrt[3]{x}]}$$

Racionalizando en el denominador:

$$E = \frac{(x^3 + 3x^2 + 2x + 1)(\sqrt[3]{x} - 1)(Fr)}{[\sqrt[3]{x^3} - 1^3] \cdot [(x+1)^3 - (\sqrt[3]{x})^3]}$$

$$E = \frac{(x^3 + 3x^2 + 2x + 1)(\sqrt[3]{x} - 1)(Fr)}{(x-1)(x^3 + 3x^2 + 2x + 1)}$$

$$E = \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(Fr)}{x - 1}$$

$\therefore$ Denominador racional = $x - 1$

Rpta.: C

Resolución 73: Se tiene:

$$E = \frac{x}{\sqrt[5]{x-y}^4 - \sqrt[5]{xy^3-y^4} + \sqrt[5]{xy-y^2}^2 + \sqrt[5]{y^4} - \sqrt[5]{y(x-y)^3}}$$

$$E = \frac{x}{\sqrt[5]{x-y}^4 - \sqrt[5]{(x-y)y}^3 + \sqrt[5]{(x-y).y}^2 + \sqrt[5]{y}^4 - \sqrt[5]{(x-y)^3.y}}$$

$$E = \frac{x}{\sqrt[5]{x-y}^4 - \sqrt[5]{(x-y)^3\sqrt[5]{y}} + \sqrt[5]{x-y}^2\sqrt[5]{y}^2 - \sqrt[5]{x-y}\sqrt[5]{y}^3 + \sqrt[5]{y}^4}$$

Dando uso de un cociente notable, tenemos:

$$E = \frac{x}{\frac{\sqrt[5]{x-y}^5 + \sqrt[5]{y}^5}{\sqrt[5]{x-y}^5 + \sqrt[5]{y}^5}} = \frac{x(\sqrt[5]{x-y} + \sqrt[5]{y})}{x-y+y}$$

$$E = \frac{x(\sqrt[5]{x-y} + \sqrt[5]{y})}{x} = \frac{\sqrt[5]{x-y} + \sqrt[5]{y}}{1}$$

$$\therefore E = \sqrt[5]{x-y} + \sqrt[5]{y}$$

Rpta.: A

Resolución 74: Si "K" es el valor más simple, podemos reescribir así:

$$K = \frac{6}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{5}}{2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 6\sqrt{5}} + \frac{10 + 3\sqrt{15}}{6}} \right] - 3\sqrt{5}$$

$$K = \frac{6}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{7\sqrt{3} - 5\sqrt{5}}{8\sqrt{3} - 6\sqrt{5}} + \frac{10 + 3\sqrt{15}}{6}} \right] - 3\sqrt{5}$$

$$\star \frac{7\sqrt{3} - 5\sqrt{5}}{8\sqrt{3} - 6\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{3} - 5\sqrt{5}}{2(4\sqrt{3} - 3\sqrt{5})}$$

$$\frac{7\sqrt{3} - 5\sqrt{5}}{8\sqrt{3} - 6\sqrt{5}} = \frac{(7\sqrt{3} - 5\sqrt{5})(4\sqrt{3} + 3\sqrt{5})}{2(4\sqrt{3} - 3\sqrt{5})(4\sqrt{3} + 3\sqrt{5})}$$

$$\frac{7\sqrt{3} - 5\sqrt{5}}{8\sqrt{3} - 6\sqrt{5}} = \frac{84 + 21\sqrt{15} - 20\sqrt{15} - 75}{2(48 - 45)}$$

$$\frac{7\sqrt{3} - 5\sqrt{5}}{8\sqrt{3} - 6\sqrt{5}} = \frac{9 + \sqrt{15}}{6}$$

Ahora en la expresión "K" tenemos:

$$K = \frac{6}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{9 + \sqrt{15}}{6}} + \frac{10 + 3\sqrt{15}}{6} \right] - 3\sqrt{5}$$

$$K = \frac{6}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{19 + 4\sqrt{15}}{6}} \right] - 3\sqrt{5}$$

$$K = \frac{6}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{19 + 4\sqrt{15}}}{\sqrt{6}} \right] - 3\sqrt{5}$$

$$K = \frac{6\sqrt{19 + 2\sqrt{4 \cdot 15}}}{\sqrt{2 \cdot 6}} - 3\sqrt{5}$$

$$K = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}(\sqrt{15} + \sqrt{4})}{\sqrt{2 \cdot 6}} - 3\sqrt{5}$$

$$K = \sqrt{3}(\sqrt{15} + 2) - 3\sqrt{5}$$

$$K = \sqrt{45} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$$

$$K = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$$

$$\therefore K = 2\sqrt{3}$$

Rpta.: C

Resolución 75: Sea la expresión:

$$E = \frac{1}{\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{7} - 6}$$

$$E = \frac{1}{(\sqrt[3]{7})^2 - (\sqrt[3]{7}) - 6}$$

Transformando el denominador tenemos:

$$E = \frac{1}{(\sqrt[3]{7} - 3)(\sqrt[3]{7} + 2)}$$

Racionalizando según la teoría obtenemos:

$$E = \frac{(\text{fr}) \cdot (\text{FR})}{(7 - 27)(7 + 8)} = \frac{(\text{fr}) \cdot (\text{FR})}{(-20)(15)}$$

$$E = \frac{(\text{fr}) \cdot (\text{FR})}{-300} = \frac{-(\text{fr}) \cdot (\text{FR})}{300}$$

$$\therefore \text{Denominador racional} = 300$$

Rpta.: A

Resolución 76: Sea la expresión:

$$E = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{10} - \sqrt{15}} + \frac{1 - \sqrt{4 - \sqrt{15}}}{\sqrt{6}}$$

Multiplicando a cada término de las fracciones por $\sqrt{2}$ obtenemos:

$$E = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} - 2\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}}{\sqrt{12}}$$

Observa que $10 - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} - 2\sqrt{15} = (\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3})^2$

Ahora en la expresión se tendrá:

$$E = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3})^2}} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}}{\sqrt{12}}$$

$$E = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{(\sqrt{2} - (\sqrt{5} - \sqrt{3}))}{2\sqrt{3}}$$

$$E = \frac{\sqrt{2}[\sqrt{5} - (\sqrt{2} - \sqrt{3})]}{[\sqrt{5} + (\sqrt{2} - \sqrt{3})][\sqrt{5} - (\sqrt{2} - \sqrt{3})]} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$E = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$E = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{2} + \sqrt{3})}{2\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$E = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$E = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$\therefore E = 1$$

Rpta.: E

Resolución 77: Sea la expresión:

$$E = \frac{1}{\sqrt[5]{8} - \sqrt[5]{4} + 1} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^3} - \sqrt[5]{2^2} + 1} \dots\dots\dots (1)$$

Considerando la siguiente identidad:

$$(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1) \equiv x^5 + x + 1$$

Racionalizando en (1) tenemos.

$$E = \frac{\sqrt[5]{2^2} + \sqrt[5]{2} + 1}{(\sqrt[5]{2^3} - \sqrt[5]{2} + 1)(\sqrt[5]{2^2} + \sqrt[5]{2} + 1)}$$

$$E = \frac{\sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{2} + 1}{\sqrt[5]{2^5} + \sqrt[5]{2} + 1} = \frac{\sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{2} + 1}{2 + \sqrt[5]{2} + 1}$$

$$E = \frac{\sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{2} + 1}{3 + \sqrt[5]{2}} = \frac{(\sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{2} + 1)(fr)}{(3 + \sqrt[5]{2})(fr)}$$

$$E = \frac{(\sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{2} + 1)(fr)}{3^5 + 2} = \frac{(\sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{2} + 1)(fr)}{243 + 2}$$

$$E = \frac{(\sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{2} + 1)(fr)}{245}$$

∴ Denominador racional = 245

Rpta.: A

Resolución 78: La condición se puede reescribir así:

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \frac{\sqrt[3]{2^2} + 1}{\sqrt[3]{2^{n+1}}}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \frac{\sqrt[3]{2^2} + 1}{\sqrt[3]{2^n} \cdot \sqrt[3]{2}}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \frac{\sqrt[3]{2^2} + 1}{2 \sqrt[3]{2}}$$

Aplicando propiedad de proporciones tenemos:

$$\frac{x^2 + x + 1 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1 - x^2 - 1} = \frac{\sqrt[3]{2^2} + 1 + 2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2} + 1 - 2\sqrt[3]{2}}$$

$$\frac{2x^2 + x + 2}{x} = \frac{(\sqrt[3]{2} + 1)^2}{(\sqrt[3]{2} - 1)^2}$$

$$\frac{\sqrt{2x^2 + x + 2}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt[3]{2} - 1} \dots\dots\dots(1)$$

También tenemos que:

$$\frac{m+1}{m-1} = \left[\frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{(2x^2 + x + 2)x}}{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{(2x^2 + x + 2)x}} \right]^n$$

En el segundo miembro multiplicamos a ambos términos de la base por $\sqrt{2}$ y obtenemos:

$$\frac{m+1}{m-1} = \left[\frac{\sqrt{2x^2 + 2x + 2 + 2\sqrt{(2x^2 + x + 2)x}}}{\sqrt{2x^2 + 2x + 2 - 2\sqrt{(2x^2 + x + 2)x}}} \right]^n$$

Transformando cada término, de la base en el segundo miembro a radicales simples tenemos:

$$\frac{m+1}{m-1} = \left(\frac{\sqrt{2x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x}}{\sqrt{2x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x}} \right)^n \dots\dots\dots(2)$$

Aplicando propiedad de proporciones en (1) tenemos:

$$\frac{\sqrt{2x^2 + x + 2} + \sqrt{x}}{\sqrt{2x^2 + x + 2} - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt[3]{2} + 1 + \sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2} + 1 - \sqrt[3]{2} + 1}$$

$$\frac{\sqrt{2x^2 + x + 2} + \sqrt{x}}{\sqrt{2x^2 + x + 2} - \sqrt{x}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{2} = \sqrt[3]{2} \dots\dots\dots(3)$$

Reemplazando (3) en (2) tenemos:

$$\frac{m+1}{m-1} = (\sqrt[3]{2})^n \Rightarrow \frac{m+1}{m-1} = 2$$

$$m+1 = 2m-2 \Rightarrow 1+2 = 2m-m$$

$$\therefore m = 3$$

Rpta.: D

Resolución 79: Sea la expresión:

$$E = \left[\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4}} + \dots\dots\dots + \frac{1}{\sqrt{20} + \sqrt{19}} \right]^{-1}$$

Racionalizando cada término de la base tenemos:

$$E = \left[(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + \dots\dots\dots + (\sqrt{20} - \sqrt{19}) \right]^{-1}$$

Reduciendo en la base tenemos:

$$E = (-\sqrt{2} + \sqrt{20})^{-1} = (\sqrt{20} - \sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{20} - \sqrt{2}}$$

$$E = \frac{\sqrt{20} + \sqrt{2}}{(\sqrt{20} - \sqrt{2})(\sqrt{20} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{20} + \sqrt{2}}{20 - 2}$$

$$E = \frac{\sqrt{20} + \sqrt{2}}{18}$$

∴ Denominador racional = 18

Rpta.: E

Resolución 80: Como $P(x)$ tiene raíz cuadrada exacta su forma será: $(4x^2 + mx + 1)^2$.

Por condición tenemos:

$$16x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = (4x^2 + mx + 1)^2$$

$$16x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 16x^4 + 8mx^3 + (m^2 + 8)x^2 + 2mx + 1$$

Observa que: $a = 8m \wedge c = 2m \wedge b = m^2 + 8 \dots\dots (1)$

Teniendo en cuenta que: $(c-2)^2 + b = a + 9 \dots\dots\dots (2)$

Reemplazando (1) en (2) tenemos:

$$(2m-2)^2 + m^2 + 8 = 8m + 9$$

$$4m^2 - 8m + 4 + m^2 + 8 = 8m + 9$$

$$5m^2 - 16m + 3 = 0$$

$$(5m-1)(m-3) = 0$$

$$m = \frac{1}{5} \vee m = 3$$

Si: $m = 3 \Rightarrow a = 24 \wedge b = 17 \wedge c = 6$

Finalmente el polinomio dado es:

$$P(x) = 16x^4 + 24x^3 + 17x^2 + 6x + 1$$

$$\therefore \Sigma \text{ de coef. pares} - \Sigma \text{ coef. impares} = 28$$

Rpta.: B

Resolución 81: Supongamos que "K" es el equivalente del primer miembro, luego:

$$K = \sqrt{5x - 2} + 2\sqrt{6x^2 - 7x - 3}$$

$$K = \sqrt{5x - 2} + 2\sqrt{(3x + 1)(2x - 3)}$$

Transformando a radicales simples tenemos:

$$K = \sqrt{3x + 1} + \sqrt{2x - 3}$$

Por condición tenemos:

$$\sqrt{3x + 1} + \sqrt{2x - 3} < \sqrt{ax + b} + \sqrt{cx - a}$$

Aquí reconocemos que: $a = 3 \wedge b = 1 \wedge c = 2$

$$\therefore a + b + c = 6$$

Rpta.: A

Resolución 82: Fácilmente podemos reconocer que si el radical dado puede transformarse en radicales simples, $\alpha x + \theta y + \sqrt{(\alpha\theta + \gamma)xy}$ debe ser un cuadrado perfecto.

Por condición se cumple que:

$$2\sqrt{\alpha x} \cdot \sqrt{\theta y} = \sqrt{(\alpha\theta + \gamma)xy}$$

Elevando al cuadrado tenemos:

$$4\alpha\theta \cdot xy = (\alpha\theta + \gamma)xy$$

$$4\alpha\theta = \alpha\theta + \gamma$$

$$3\alpha\theta = \gamma$$

$$\therefore \frac{\alpha\theta}{\gamma} = \frac{1}{3}$$

Rpta.: C

Resolución 83: Sea "K" el primer miembro, luego procedemos a simplificar:

$$K = \frac{\sqrt{\sqrt{m} + m\sqrt{m} + 2m\sqrt{m}}}{\sqrt{m\sqrt{m}}}$$

$$K = \frac{\sqrt{\sqrt{m} + m\sqrt{m} + 2\sqrt{m}\sqrt{m}\sqrt{m}}}{\sqrt{m\sqrt{m}}}$$

$$K = \frac{\sqrt{\sqrt{m} + (1 + m + 2\sqrt{m})} \cdot \sqrt{m(m-1)!}}{\sqrt{m \cdot m}}$$

$$K = \frac{\sqrt{m} \cdot \sqrt{1 + 2\sqrt{m} + m} \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt{(m-1)!}}{\sqrt{m \cdot m}}$$

$$K = \sqrt{1 + 2\sqrt{m} + m} \cdot \sqrt{(m-1)!}$$

$$K = \sqrt{(\sqrt{m} + 1)^2} \cdot \sqrt{(m-1)!}$$

$$K = (\sqrt{m} + 1) \cdot \sqrt{(m-1)!}$$

$$K = \sqrt{m} \cdot \sqrt{(m-1)!} + \sqrt{(m-1)!}$$

$$K = \sqrt{m(m-1)!} + \sqrt{(m-1)!}$$

$$K = \sqrt{m!} + \sqrt{(m-1)!}$$

Por condición tenemos:

$$\sqrt{m!} + \sqrt{(m-1)!} <> \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

$$\sqrt{m!} + \sqrt{(m-1)!} <> \sqrt{3!} + \sqrt{2!}$$

Aquí reconocemos que $m = 3$

$$\therefore m^2 - 1 = 8$$

Rpta.: A

Resolución 84: Por condición se pide "E", donde:

$$E = \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-2x-3}$$

Multiplicando por $\sqrt{2}$ tenemos :

$$\sqrt{2}E = \sqrt{2x-2} + 2\sqrt{x^2-2x-3}$$

$$\sqrt{2}E = \sqrt{2x-2} + 2\sqrt{(x+1)(x-3)}$$

$$\sqrt{2}E = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}$$

$$E = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{2}}$$

$$E = \underbrace{\sqrt{\frac{x+1}{2}}}_{r_1} + \underbrace{\sqrt{\frac{x-3}{2}}}_{r_2}$$

$$\text{En } r_1, \text{ si } x=7 \Rightarrow VN=2$$

$$\text{En } r_2, \text{ si } x=7 \Rightarrow VN=\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{Valor numérico} = VN = \sqrt{2} \vee 2$$

Rpta.: D

Resolución 85: Si "K" es el equivalente de la expresión dada, podemos reescribir así:

$$K = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{\frac{x-1}{2}}$$

$$K = \frac{\sqrt{2}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}}$$

$$K = \frac{\sqrt{2x+2\sqrt{x}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}}$$

Por condición $x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 1 = x$, ahora tenemos que:

$$K = \frac{\sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{2}}$$

$$K = \frac{\sqrt{2x + 2\sqrt{(x + 1)(x - 1)}} - \sqrt{x - 1}}{\sqrt{2}}$$

Transformando a radicales simples tenemos:

$$K = \frac{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} - \sqrt{x - 1}}{\sqrt{2}}$$

$$K = \frac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot x}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$$

$$\therefore K = \frac{\sqrt{2}x}{2}$$

Rpta.: E

Resolución 86: Sea la expresión:

$$E = \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{7} - 1} - \sqrt{15 + 2\sqrt{15} + 2\sqrt{35} + 2\sqrt{21}}$$

observa que:

$$15 + 2\sqrt{15} + 2\sqrt{35} + 2\sqrt{21} = (\sqrt{7} + \sqrt{5} + \sqrt{3})^2$$

Ahora en la expresión, previa racionalización de los denominadores, se tendrá:

$$E = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} + \frac{6(\sqrt{7} + 1)}{6} - \sqrt{(\sqrt{7} + \sqrt{5} + \sqrt{3})^2}$$

$$E = \sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{7} + 1 - \sqrt{7} - \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

$$\therefore E = 1$$

Rpta.: C

Resolución 87: Sea la expresión:

$$K = \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x - \sqrt{x^2 + 1}} - \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$K = \left[\frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2 - (x - \sqrt{x^2 + 1})^2}{(x - \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$K = \left[\frac{4(x)(\sqrt{x^2 + 1})}{x^2 - (x^2 + 1)} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$K = \frac{4x\sqrt{x^2 + 1}}{-\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{4x}{-1}$$

$$\therefore K = -4x$$

Rpta.: A**Resolución 88:** La expresión dada es:

$$E = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{19 - 8\sqrt{3}} + \sqrt{3 + \sqrt{36}}$$

$$E = \sqrt{7 + 2\sqrt{4 \cdot 3}} + \sqrt{19 - 2\sqrt{16 \cdot 3}} + \sqrt{3 + 6}$$

$$E = \sqrt{4} + \sqrt{3} + \sqrt{16} - \sqrt{3} + \sqrt{9}$$

$$E = 2 + 4 + 3$$

$$\therefore E = 9$$

Rpta.: B

Resolución 89: Sea la expresión:

$$K = \sqrt{3 - \sqrt{3} - \underbrace{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}}$$

$$K = \sqrt{3 - \sqrt{3} - (\sqrt{3} - \sqrt{1})}$$

$$K = \sqrt{3 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{1}}$$

$$K = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{1}$$

$$\therefore K = \sqrt{3} - 1$$

Rpta.: A

Resolución 90: Si "K" es el equivalente del segundo miembro, podemos reescribir así:

$$K = \frac{7}{\sqrt{8} - 1} + \frac{2}{\sqrt{3} + 1}$$

Racionalizando denominadores tenemos:

$$K = \frac{7(\sqrt{8} + 1)}{7} + \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{2}$$

$$K = \sqrt{8} + 1 + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{8} + \sqrt{3}$$

$$K = \sqrt{(8 + 3) + 2\sqrt{8 \cdot 3}} = \sqrt{11 + 2\sqrt{24}}$$

Por condición:

$$\sqrt{a + 2\sqrt{b}} <> \sqrt{11 + 2\sqrt{24}}$$

Aquí reconocemos que $a = 11 \wedge b = 24$

$$\therefore a + b = 35$$

Rpta.: C

Resolución 91: Sea la expresión:

$$E = \sqrt{11 + \sqrt{112}} - \sqrt{11 - \sqrt{112}}$$

$$E = \sqrt{11 + \sqrt{28 \cdot 4}} - \sqrt{11 - \sqrt{28 \cdot 4}}$$

$$E = \sqrt{11 + 2\sqrt{28}} - \sqrt{11 - 2\sqrt{28}}$$

$$E = \sqrt{11 + 2\sqrt{7 \cdot 4}} - \sqrt{11 - 2\sqrt{7 \cdot 4}}$$

$$E = \sqrt{7} + \sqrt{4} - (\sqrt{7} - \sqrt{4})$$

$$E = \sqrt{7} + \sqrt{4} - \sqrt{7} + \sqrt{4}$$

$$E = \sqrt{4} + \sqrt{4} = 2 + 2$$

$$\therefore E = 4$$

Rpta.: B**Resolución 92:** Sea la expresión:

$$E = \sqrt{3 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{2} - \sqrt{12}} + \sqrt{18 - \sqrt{128}}}$$

$$E = \sqrt{3 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} + \sqrt{18 - 2\sqrt{32}}}$$

$$E = \sqrt{3 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} + \sqrt{16 - \sqrt{2}}}$$

$$E = \sqrt{3 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}$$

$$E = \sqrt{3 - \sqrt{3} + \sqrt{2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1}}$$

$$E = \sqrt{3 - \sqrt{3} + \sqrt{2 + 2\sqrt{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}}}$$

$$E = \sqrt{3 - \sqrt{3} + \sqrt{2 + 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}}$$

$$E = \sqrt{3 - \sqrt{3} + \sqrt{2 + 2(\sqrt{3} + 1)}}$$

$$E = \sqrt{3 - \sqrt{3} + \sqrt{2 + 2\sqrt{3} + 2}}$$

$$E = \sqrt{3 - \sqrt{3} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} = \sqrt{3 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1}$$

$$E = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4}$$

$$\therefore E = 2$$

Rpta.: E

Resolución 93: Por condición $P(x)$ tiene raíz cuadrada exacta, luego de acuerdo con el algoritmo procedemos así:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{4x^2 + 4x + \alpha} & 2x + 1 \\ -4x^2 & (4x + 1)(1) \\ \hline 4x + \alpha & \\ -4x - 1 & \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

Se plantea que

$$\alpha - 1 = 0$$

$$\therefore \alpha = 1$$

Rpta.: B

Resolución 94: De acuerdo con el algoritmo procedemos de la manera siguiente:

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{x^6 + 4x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 12x + 8} & x^3 + 2x - 3 \\
 -x^6 & (2x^3 + 2x)(2x) \\
 \hline
 4x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 12x + 8 & (2x^3 + 4x - 3)(-3) \\
 -4x^4 - 4x^2 & \\
 \hline
 -6x^3 - 12x + 8 & \\
 6x^3 + 12x - 9 & \\
 \hline
 0 & 0 \quad -1
 \end{array}$$

$$\therefore \text{Residuo} = R(x) = -1$$

Rpta.: A

Resolución 95: Sea $x+1=y \Rightarrow x=y-1$. Ahora en la expresión:

$$\sqrt{(x+1)^4 + 4(x+1)^3 - 2(x+1)^2 - 11(x+1) + 11}$$

Se tendrá: $\sqrt{y^4 + 4y^3 - 2y^2 - 11y + 11}$

Aplicando el algoritmo procedemos de la manera siguiente:

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{y^4 + 4y^3 - 2y^2 - 11y + 11} & y^2 + 2y - 3 \\
 -y^4 & (2y^2 + 2y)(2y) \\
 \hline
 4y^3 - 2y^2 - 11y + 11 & (2y^2 + 4y - 3)(-3) \\
 -4y^3 - 4y^2 & \\
 \hline
 -6y^2 - 11y + 11 & \\
 6y^2 + 12y - 9 & \\
 \hline
 y + z &
 \end{array}$$

Nótese que $y = 2 \equiv x + 3$ es el residuo hallado. Por condición se cumple que:

$$mx + n \equiv x + 3$$

De donde tenemos: $m = 1 \wedge n = 3$

$$\therefore mn = 3$$

Rpta.: E

Resolución 96: De acuerdo con el algoritmo procedemos de la manera siguiente:

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{x^6 - 6x^5 + 13x^4 - 18x^3 + 22x^2 + nx + K} & x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \\
 -x^6 & (2x^3 - 3x^2)(-3x^2) \\
 \hline
 -6x^5 + 13x^4 - 18x^3 + 22x^2 + nx + K & (2x^3 - 6x^2 + 2x)(2x) \\
 6x^5 - 9x^4 & (2x^3 - 6x^2 + 4x - 3)(-3) \\
 \hline
 4x^4 - 18x^3 + 22x^2 + nx + K & \\
 4x^4 + 12x^3 - 4x^2 & \\
 \hline
 -6x^3 + 18x^2 + nx + K & \\
 6x^3 - 18x^2 + 12x - 9 & \\
 \hline
 \text{Residuo} \equiv (12+n)x + (K-9) &
 \end{array}$$

Por condición:

$$\begin{aligned}
 12 + n &= -1 \wedge K - 9 = 5 \\
 n &= -13 \wedge K = 14 \\
 \therefore n + K &= 1
 \end{aligned}$$

Rpta.: B

Resolución 97: Como el polinomio dado tiene raíz cuadrada exacta al aplicar el algoritmo se le podrá ordenar en forma creciente, veamos:

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{1 - 4x^2 + 6x^4 + bx^6 + ax^8} & 1 - 2x^2 + x^4 \\
 -1 & (2 - 2x^2)(-2x^2) \\
 \hline
 -4x^2 + 6x^4 + bx^6 + ax^8 & (2 - 4x^2 + x^4)(x^4) \\
 4x^2 - 4x^4 & \\
 \hline
 2x^4 + bx^6 + ax^8 & \\
 -2x^4 + 4x^6 - x^8 & \\
 \hline
 (b+4)x^6 + (a-1)x^8 &
 \end{array}$$

Por condición:

$$\begin{aligned}
 a - 1 &= 0 \wedge b + 4 = 0 \\
 a &= 1 \wedge b = -4 \\
 \therefore a - b &= 5
 \end{aligned}$$

Rpta.: D

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 05

Resolución 98: Por condición tenemos:

$$\sqrt{a+4\sqrt{b+2}} <> \sqrt{a-2} + \sqrt{2b}$$

$$\sqrt{a+2\sqrt{(4)(b+2)}} <> \sqrt{a-2} + \sqrt{2b}$$

Aquí se cumple que:

$$I. a = (a-2) + (2b)$$

$$\Rightarrow 2 = 2b$$

$$1 = b$$

$$II. (a-2)(2b) = 4(b+2)$$

$$\Rightarrow a-2 = 2(3)$$

$$a-2 = 6$$

$$a = 8$$

Supongamos que "K" es el equivalente de la expresión a transformar.

$$K = \sqrt{a+b+2\sqrt{a+6b}} = \sqrt{9+2\sqrt{14}}$$

$$\therefore K = \sqrt{7} + \sqrt{2}$$

Rpta.: A**Resolución 99:** Sea "K" el equivalente del primer miembro, luego tenemos:

$$K = \sqrt{11\sqrt{2}-12} = \sqrt{11\sqrt{2}-6\cdot\sqrt{2}\sqrt{2}}$$

$$K = \sqrt{\sqrt{2}(11-6\sqrt{2})} = \sqrt[4]{2}\sqrt{11-6\sqrt{2}}$$

$$K = \sqrt[4]{2}\sqrt{11-2\sqrt{9\cdot 2}} = \sqrt[4]{2}(\sqrt{9}-\sqrt{2})$$

$$K = \sqrt[4]{2}(\sqrt[4]{81}-\sqrt[4]{4}) = \sqrt[4]{162}-\sqrt[4]{8}$$

Por condición tenemos:

$$\sqrt[4]{\alpha}-\sqrt[4]{\theta} <> \sqrt[4]{162}-\sqrt[4]{8}$$

Aquí reconocemos que: $\alpha = 162 \wedge \theta = 8$

$$\text{Finalmente tenemos: } \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\theta}} = \sqrt[4]{\frac{162}{8}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\theta}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Rpta.: B

Resolución 100: La equivalencia dada es:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} <> \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}$$

Siendo "K" el primer miembro, procedemos a transformar.

$$K = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}}$$

$$K = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{4}-1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{4}-1)(\sqrt{4}^2+\sqrt{4}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{4}^2+\sqrt{4}+1)}}$$

$$K = \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{4})^3-(1)^3}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{16}+\sqrt{4}+1)}} = \sqrt[3]{\frac{4-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}^2+2\sqrt{2}+1)}}$$

$$K = \sqrt[3]{\frac{3}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)^2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{(\sqrt{2}+1)^3}}$$

$$K = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt[3]{3}(\sqrt{2}^2-\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}^2-\sqrt{2}+1)}$$

$$K = \frac{\sqrt[3]{3}(\sqrt{4}-\sqrt{2}+1)}{2+1} = \frac{\sqrt[3]{3}(\sqrt{4}-\sqrt{2}+1)}{3}$$

$$K = \frac{\sqrt[3]{3}(\sqrt{4}-\sqrt{2}+1)}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{2}+1}{\sqrt[3]{9}}$$

$$K = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

Por condición tenemos:

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} <> \sqrt[3]{\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

Aquí se cumple que:

$$\{x, y, z\} = \left\{ \frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9} \right\}$$

$$\therefore x+y+z = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

Rpta.: E



PROBLEMAS RESUELTOS

1. Simplificar: $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + 1}{x^2 - \frac{1}{x}} - \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}$

- A) -5 B) -4 C) -3
D) -2 E) -1

2. Indicar el equivalente de:

$$\left[\frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{b-a} - \frac{1}{b-a} \right] \div \left[\frac{(a+b)^3 - (a-b)^3}{(a+b)^2 - (a-b)^2} \right]$$

- A) b B) a C) 1
D) a + b E) $\frac{a}{b}$

3. Simplificar:

$$\frac{(x+2)^4 + (x-2)^4 + (x^2+4x-4)^2 + (x^2-4x-4)^2}{(x^2-4x)^2 + 8x^2}$$

- A) 1 B) 2 C) 4
D) 8 E) 16

4. Si: $a + b + c = 0$. Indicar el equivalente de:

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{(2a^3 - b^3 - c^3)(a^2 + b^2 + c^2)}$$

- A) 3a B) $\frac{1}{3a}$ C) $\frac{1}{b}$
D) $\frac{1}{2b}$ E) $\frac{1}{3c}$

5. Reducir: $\left(1 + \frac{x}{x+y+z}\right)^2 + \left(1 + \frac{x}{x+y+z}\right)^2 + \left(1 + \frac{x}{x+y+z}\right)^2 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x+y+z)^2}$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

6. Si: $x + y + z - 2 = x^3 + y^3 + z^3 - 8 = 1$

Calcular el valor de:

$$\frac{1}{3x+yz} + \frac{1}{3y+xz} + \frac{1}{3z+xy}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 6 E) 27

7. Reducir:

$$\frac{a+x}{x(x-y)(x-z)} + \frac{a+y}{y(y-x)(y-z)} + \frac{a-z}{z(z-x)(z-y)}$$

- A) 0 B) $\frac{1}{xyz}$ C) a
D) $\frac{a}{xyz}$ E) xyz

8. Simplificar:

$$\frac{x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y)}{x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)}$$

- A) $x + y + z$ B) 0 C) $xy + xz + yz$
D) x E) 1

9. Simplificar:

$$\frac{a^9 + b^9 + c^9 - 3a^3b^3c^3}{9abc}$$

Si: $a + b + c = 0$

- A) $(a^2 - bc)^3$ B) $(a+b)^6$ C) $(b+c)^6$
D) $(a+c)^6$ E) $(a^2 + bc)^6$

10. Sabiendo que:

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \wedge y = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}$$

Encontrar el valor de: $(x+1)(y+1)$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) $\frac{1}{2}$

11. Una fracción simple de:

$$\frac{5x^2 + 6x - 5}{x^3 + 2x^2 - x - 2} \text{ es:}$$

- A) $\frac{3}{x-1}$ B) $\frac{1}{x+1}$ C) $\frac{2}{x+2}$
D) $\frac{3}{x+1}$ E) $\frac{1}{x+2}$

12. Simplificar: $\frac{(x^2 + 6x + 4)(x + 4)^2 + (x + 3)^2}{(x + 3)^2(x^2 + 6x + 4) + 1}$

- A) $x^2 + x + 1$ B) $x^2 - x - 1$
C) $x^2 - x + 1$
D) $x^2 + x - 1$ E) $x^2 + 1$

13. Si: $\frac{x}{b+c-a} = \frac{x}{c+a-b} = \frac{x}{a+b-c}$. Qué

valor asume: $\frac{2(ax + by + cz)(x + y + z)}{x(x + y) + y(x + z) + z(x + y)}$

- A) $a + b + c$ B) $a + b - c$ C) $a - b + c$
D) $b - a + c$ E) 1

14. Si se cumple que:

$$\frac{42 - 19x}{(x^2 + 1)(x - 4)} < \frac{ax + b}{x^2 + 1} + \frac{c}{x - 4}$$

proporcionar el valor de: "c - b"

- A) 13 B) 9 C) 11
D) 14 E) 7

15. Luego de descomponer en fracciones parciales la siguiente fracción:

$$\frac{4x^2 - 10x - 6}{(x + 1)^2(x - 3)}$$

Indicar la suma de todos los numeradores de las fracciones simples obtenidas.

- A) 2 B) 5 C) 4
D) 9 E) 12

16. Calcular el valor de: $a^2 - b^2$ si la fracción:

$$\frac{(a + b)x + (a - b)y + 1}{4x + 2y + 1}$$

tiene un valor constante.

- A) 7 B) 12 C) 3
D) 5 E) 8

17. Al efectuar:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{x}{1 - \frac{1}{x}}}}} \div \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{x}{1 + \frac{1}{x}}}}$$

Se obtiene:

- A) 2 B) $\frac{x-1}{x+1}$ C) $x + 2$
D) $\frac{2x}{x+2}$ E) $\frac{2(x-1)}{x+2}$

18. Que valor asume la expresión:

$$\frac{a^n}{2na^n - 2nx} + \frac{b^n}{2nb^n - 2nx}$$

si se sustituye x por: $\frac{a^n + b^n}{2}$

- A) 1 B) $\frac{n}{n+1}$ C) $\frac{n-1}{n+1}$
D) $\frac{n}{n-1}$ E) $\frac{1}{n}$

19. Indicar la fracción simple de mayor numerador que se obtiene al transformar

$$\frac{3x^3 - 8x^2 + 10}{(x - 1)^4}$$

- A) $\frac{3}{(x-1)^3}$ B) $\frac{5}{(x-1)^3}$ C) $\frac{-4}{(x-1)^2}$
D) $\frac{-7}{(x-1)^3}$ E) $\frac{5}{(x-1)^4}$

20. El numerador de una de las fracciones en las cuales se descompone la fracción:

$$\frac{2x^2 - 11x + 5}{x^3 - x^2 - 11x + 15} \text{ es:}$$

- A) 6 B) 2 C) $3x+1$
D) $3x$ E) $2x+1$

21. Calcular $U + N + I$ de:

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^3 - x} = \frac{U}{x} + \frac{N}{x+1} + \frac{I}{x-1}$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) -1 E) 1

22. Reducir:

$$n + \frac{\frac{n}{n-1} + \frac{n-1}{n-2}}{n-1 + \frac{n-2}{n-2 + \frac{n-3}{n-3 + \dots}}}$$

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$$

- A) $\frac{n^2+1}{n^3+1}$ B) $\frac{n^2-1}{n}$ C) $\frac{n-1}{n}$
D) $\frac{n+1}{n+2}$ E) $\frac{n+2}{n-1}$

23. Si: $\frac{a^2 - bc}{a} + \frac{b^2 - ac}{b} + \frac{c^2 - ab}{c} = 0$

Halle el valor de:

$$\frac{a}{a^2 - bc} + \frac{b}{b^2 - ac} + \frac{c}{c^2 - ab}$$

- A) 1 B) 0 C) abc
D) $a + b + c$ E) $\frac{1}{abc}$

24. Simplificar:

$$\frac{(1+x^2)^4 + (1-x^4)^2}{(1+x^2+x^4)^2 - x^4}$$

- A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{x^2+1}{x^4+1}$
D) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ E) x

25. El equivalente de:

$$\frac{1}{ax} + \frac{x}{(a-x)^2} + \frac{x^2}{(a-x)^3} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(a-x)^{2n}}$$

$$\frac{1}{ax} - \frac{x}{(a-x)^2} + \frac{x^2}{(a-x)^3} - \dots - \frac{x^{2n-1}}{(a-x)^{2n}}$$

es:

- A) $\frac{a}{a-2x}$ B) $\frac{a}{2x-a}$ C) $\frac{a-2x}{a}$
D) $\frac{2x-a}{a}$ E) $\frac{a}{a-x}$

26. Si: $abc=1$, que valor asume:

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

27. Asumiendo que:

$$a^{-2}(bc-a) + b^{-2}(ac-b) + c^{-2}(ab-c) = 0$$

Proporcionar el equivalente de:

$$\frac{(ab)^3 + (bc)^3 + (ac)^3}{ab + bc + ac}$$

- A) $a + b + c$ B) abc C) $\frac{1}{a+b+c}$
D) $\frac{1}{abc}$ E) 1

28. Sabiendo que:

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{b-a} + \frac{1}{b+a} = 0$$

Indicar el valor de:

$$\frac{c+a}{a+b} + \frac{c+a}{b+c}$$

- A) 0 B) 1 C) -1
D) 2 E) -2

29. Simplificar:

$$\frac{(x-3)^4 - x(x-6)(x-4)(x-2) + 10x(6-x) + 9}{(x+1)(x-5)(x^2-9) - (x-1)^2(x^2-2x) + 19x(x-2)}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

30. Si la siguiente fracción:

$$\frac{(m+2n)x^2 + (m^2+4mn)xy + (7m+6)y^2}{x^2 + (m+n)xy + (2m+1)y^2}$$

Es independiente de x e y. Calcular el valor de: m-n

- A) 1 B) -1 C) 2
D) 3 E) 4

31. Si se cumple:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \frac{x_4}{y_4} \\ y_1 + y_2 + x_3 + x_4 = 67 \\ x_1 + x_2 + y_3 + y_4 = 43 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 88 \end{cases}$$

Calcular el valor de:

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2$$

- A) 31 B) 33 C) 35
D) 37 E) 39

32. Si: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 0$

Encontrar el valor de:

$$\frac{(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab)}{a^2b^2c^2}$$

- A) 6 B) -3 C) 2
D) -1 E) 0

33. Si: $\frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{b^2+c^2}{bc} + \frac{a^2+c^2}{ac} = -2$

Proporcionar el equivalente de:

$$\frac{(a+b+c)^6 - (a^6+b^6+c^6)}{(ab)^3 + (bc)^3 + (ac)^3}$$

- A) 1 B) -2 C) 4
D) 8 E) 16

34. Asumiendo que:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} = 2\sqrt{2}$$

y además: $a+b+c = 3-2\sqrt{2}$

Indicar el inverso multiplicativo de la siguiente expresión:

$$a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}$$

- A) $17-12\sqrt{2}$ B) $13+\sqrt{2}$ C) 1
D) $2-\sqrt{2}$ E) $5+7\sqrt{2}$

35. Si: $a+b+c = 0$

Indique el equivalente de:

$$\frac{b-c}{a} \left(\frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right) + \frac{c-a}{b} \left(\frac{a}{b-c} + \frac{c}{a-b} \right) + \frac{a-b}{c} \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} \right)$$

- A) abc B) -6 C) 3
D) 6 E) 1

36. Proporcionar el equivalente de:

$$\frac{ab+a+n}{b+1} + \frac{bc+b+n}{c+1} + \frac{ac+c+n}{a+1}$$

Sabiendo que:

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} = \frac{a+b+c}{n}$$

- A) n B) $2n$ C) $3n$
D) $\frac{n}{3}$ E) $6n$

37. Si: $x \neq y$; $x \neq z \wedge y \neq z$

$$\frac{yz - x^2}{y + z} = \frac{xz - y^2}{x + z}$$

Luego ambas fracciones son iguales a:

- A) $x - y + z$ B) $x - y - z$ C) $-x - y - z$
D) 0 E) $x + y + z$

38. Efectuar:

$$\left(1 - \frac{12}{x+1} + \frac{60}{x+2} - \frac{60}{x+3}\right) \left(1 + \frac{12}{x-1} - \frac{60}{x-2} + \frac{60}{x-3}\right)$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) -1 E) 1

39. Si: np es el valor constante de la fracción algebraica de valores $x \wedge y$

$$\frac{mnxy(2n + (3p + 1)x) + 2ny^2}{ny(5nx^2 - (m - 1)y) + pxy}$$

Determine Ud. el valor de:

$$\frac{n^4(1 - m)}{1 + 3p}$$

- A) $0,1$ B) $0,2$ C) $0,3$
D) $0,4$ E) $0,5$

40. Al reducir:

$$(1+x)^{-1} + 2(1+x^2)^{-1} + 2^2(1+x^2)^{-1} + \dots + 2^n(1+x^{2^n})^{-1}$$

Obtenemos:

- A) $2^{n+1}(1 - x^{2^{n+1}})^{-1} + (x-1)^{-1}$
B) $2^{n+1}(1 + x^{2^{n+1}})^{-1} + (x+1)^{-1}$
C) $2^{n+1}(1 + x^{2^{n+1}})^{-1} + (x-1)^{-1}$
D) $2^{n+1}(1 - x^{2^{n+1}})^{-1} - (x+1)^{-1}$
E) $2^{n+1}(1 - x^{2^{n+1}})^{-1} - (x-1)^{-1}$

41. El equivalente de:

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 15}{x^3 + 2x^2 + 5x + 10} + \frac{x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 2}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x - 4}$$

es:

- A) 1 B) $x + 4$ C) 2
D) $\frac{x+4}{x+2}$ E) $\frac{1}{x+2}$

42. Al reducir: $\frac{1}{(x+y)(x+2y)} + \frac{1}{(x+2y)(x+3y)} + \frac{1}{(x+3y)(x+4y)} + \dots + \text{"n" fracciones}$

Se obtiene:

- A) $\frac{1}{(x-y)(x+2y)}$
B) $\frac{1}{(x-y)(y+nx)}$
C) $\frac{n}{(x+y)(x+ny+y)}$
D) $\frac{n}{x+ny+y}$
E) $\frac{ny}{(x+y)(x+ny+y)}$

43. Al descomponer la fracción:

$$\frac{9x - 14}{6x^2 + 7x - 3}$$

en 2 fracciones parciales de numeradores:

$a \wedge b$; se observa que " $a + b$ " es:

- A) 1 B) -3 C) -2
D) 2 E) 3

44. Si la fracción:

$$\frac{x^2 + 5}{(x - 1)(x^2 - x)}$$

Se descompone en 3 fracciones parciales.

¿Cuál es el valor del producto de todos los numeradores de estas fracciones?

- A) 120 B) -120 C) 110
D) -110 E) 150

45. Halle el equivalente de:

$$\left(1 + \frac{2x}{y+z}\right) \left(1 + \frac{2y}{x+z}\right) \left(1 + \frac{2z}{x+y}\right)$$

Sabiendo que:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} + 3 = 0$$

- A) 1 B) -1 C) -8
D) 8 E) -27

46. Sabiendo que:

$$P(x) \equiv \frac{(1-x)(y-x)}{y(1-y^2)} ;$$

$$Q(x) \equiv \frac{(1-x)(y^2-x)(y-x)}{y^3(1-y^3)}$$

Reducir:

$$P(y^3) + Q(y^3) + \frac{1-y^3}{1-y}$$

- A) 1 B) -1 C) 0
D) 3 E) -3

47. Si: $x - xy + y = 1 - z^2$

Halle el equivalente de:

$$\frac{x-1}{y-1} - \frac{(y-1)^2}{(y-1)^2 - z^2} - \frac{(x+y)(x-1)}{x^2 - z^2 - 1}$$

- A) -5 B) -4 C) -3
D) -1 E) -2

48. Dada la condición:

$$\frac{(x^2 - 1) + (b+1)(c+1)}{(x^2 - 1) + (b-1)(c-1)} = \frac{a-1}{a+1}$$

Calcular el valor de:

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(a+x)(x+b)(x+c)}$$

- A) 1 B) -1 C) 8
D) -8 E) 3

49. Si: $\frac{(y-x)^3}{y^3 - x^3} + \frac{(y-z)^3}{z^3 - y^3} + \frac{(x-z)^3}{x^3 - z^3} = 27$

proporcionar el valor de:

$$\frac{(x+y)^2}{(x+y)^2 - xy} + \frac{(y+z)^2}{(y+z)^2 - xy} + \frac{(z+x)^2}{(z+x)^2 - zx}$$

- A) 11/3 B) -5 C) 13
D) -13 E) 5

50. Si: $\forall n \geq 1 \wedge n \in \mathbb{N}$. Se cumple:

$$F(n) = x^n - \frac{F(n-1)}{x}$$

Hallese en forma explícita:

$F(1999)$ sabiendo que: $F(0) = 1$

- A) $x^{-1999}(x^2 + 1)^{-1}(x^{4000} - 1)$
B) $x^{-1999}(x^2 + 1)^{-1}(x^{4000} + 1)$
C) $x^{-1999}(x^2 - 1)^{-1}(x^{4000} + 1)$
D) $x^{-1999}(x^2 - 1)^{-1}(x^{4000} - 1)$
E) $x^{-1999}(x^2 - 1)^{-1}(x^{4000} - 1)$

51. Reducir:

$$\frac{16a^4 + 28a^2 + 16a + 36}{8a^2 + 12a + 18} + \frac{4a^3 + 8a^2 - 26a - 18}{4a^2 + 6a + 9} + 2a$$

- A) 0 B) 1 C) 2a
D) $2a^2$ E) $\frac{1}{2}$

52. Simplificar:

$$\frac{2(n+1) \left\{ 8(n+2)^3 - [(2n+4)^3 - 1] + 1 \right\} + 4n + 8}{[(2n+3)^3 + 1]^2 - [(2n+3)^3 - 1]^2}$$

- A) 2n B) 2n + 3 C) 3n
D) $(2n+3)^{-2}$ E) 1

53. Si la fracción:

$$f(x;y) = \frac{(ax+by)^2}{p^2x^2 + 2m^2xy + m^2y^2}$$

es de valor constante "k". Calcular

$$\frac{a^2 + b^2 + p^2 + m^2}{a^2 + b^2 - p^2 - m^2}$$

- A) $\frac{k+1}{k-1}$ B) $\frac{k^2+1}{k^2-1}$ C) k + 1
D) $k^2 - 1$ E) k - 1

54. Calcular: $\frac{A}{3} + B + C$, sabiendo que:

$$\frac{4x^2 - 2x + 3}{2x^2 - x - 1} <> A + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{2x+1}$$

- A) -1 B) 1 C) 3
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

55. El equivalente de:

$$E = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} \text{ es:}$$

- A) 1,7321 B) 1,4142 C) 3,1463
D) 0,3139 E) 1,7172

56. Cuál es el equivalente de:

$$\sqrt[4]{97 + 56\sqrt{3}} - \sqrt[4]{97 - 56\sqrt{3}}$$

- A) 4 B) 7,4642 C) 0,5358
D) 3,4642 E) 1,4642

57. Que valor debe asumir "a" para que el polinomio:

$$P(x) = 4x^{2n} - 12x^{n+1} + anx^n + 9x^2 - 6nx + n^2$$

- A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

58. El valor más simple de:

$$E = \sqrt[4]{3 + \sqrt{7}} \left[\sqrt{\sqrt{13 - \sqrt{7}} - \sqrt{5 - \sqrt{7}}} \right]. \text{ Es:}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

59. Reducir:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$$

- A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\sqrt{6}$

60. El equivalente de:

$$\frac{2 + 2\sqrt{6}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}} \text{ es:}$$

- A) 2,73... B) 0,73... C) 2,42...
D) 0,42... E) 2,16

71. Simplificar la siguiente expresión:

$$\left(\frac{\sqrt[5]{7} - \sqrt[5]{48}}{\sqrt[4]{4(2-\sqrt{3})} \sqrt[7]{7-\sqrt{5}}} \right)^{\frac{(7+4\sqrt{3})\sqrt[7]{7}}{2}}$$

- A) 8 B) $\sqrt{2}$ C) 4
D) 1 E) 2

72. Proporcionar el denominador simplificado al racionalizar

$$\frac{\sqrt[3]{10}(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2})}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{2}}$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 7

73. Luego de transformar a radicales simples:

$$\sqrt{2x^3 - x + 2\sqrt{x^6 - x^4 - 20x^2 - 9x - 1}}$$

Indica uno de ellos:

- A) $\sqrt{x^3 - 5x + 1}$ B) $\sqrt{x^3 - 4x - 1}$
C) $\sqrt{x^3 - 5x - 1}$
D) $\sqrt{x^3 + 4x - 1}$ E) $\sqrt{x^3 - 4x + 1}$

74. Reducir:

$$\frac{\sqrt{3a+1} - \sqrt{3a-1}}{\sqrt{2}\sqrt{3a+\sqrt{9a^2-1}}} + \frac{\sqrt{2a+1} - \sqrt{2a-1}}{\sqrt{2}\sqrt{2a+\sqrt{4a^2-1}}} + \frac{5a^2}{\sqrt{9a^2-1} - \sqrt{4a^2-1}}$$

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{5a}$ C) $5a^2$
D) $5a$ E) $-5a$

75. El equivalente de:

$$\left[\frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-3)(\sqrt{45}-9)}{(5-2\sqrt{5})(2\sqrt{10})} + \frac{13+2\sqrt{10}}{5\sqrt{2}} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \right]$$

Es:

- A) $\sqrt{15} - 2$ B) $\sqrt{15} + 1$ C) $\sqrt{10} - 1$
D) $\sqrt{13} - 3$ E) $\sqrt{30} + 2$

76. Sabiendo que:

$$\frac{n - \sqrt[n]{4^m - 1}}{n - \sqrt[n]{1 - 2^n}} = \frac{-\sqrt[n]{2^{3m-n} - 1}}{-\sqrt[n]{mn + 1}} = 2$$

Proporcionar el valor numérico de:

$$E = \frac{\sqrt[n]{2^n + mn + 1} + \sqrt[n]{2^m - mn - 1}}{\sqrt[n]{2^n + mn + 1} - \sqrt[n]{2^m - mn - 1}}$$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

77. Sabiendo que:

$$a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1$$

Evaluar:

$$\frac{9}{abc} \left[a^2 \sqrt{\frac{b+c}{(a+b)(a+c)}} + b^2 \sqrt{\frac{a+c}{(b+c)(a+b)}} + c^2 \sqrt{\frac{a+b}{(b+c)(a+c)}} \right]$$

- A) $3\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\sqrt{3}$
D) 3 E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

78. Simplifíquese:

$$\frac{\sqrt[4]{31+8\sqrt{15}} + \sqrt[4]{31-8\sqrt{15}}}{\sqrt[4]{23+8\sqrt{7}} + \sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}}$$

- A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\sqrt{6}$

79. $\sqrt[4]{4}\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{2x^3+x^2+2x} + \sqrt{x}$

Admite transformación a radicales simples.

¿Cuál es el valor numérico de uno de ellos si hacemos: $x = 1$?

- A) 2 B) 3 C) $\sqrt{5}$
D) 1 E) $\sqrt{7}$

80. Al efectuar:

$$\left[\frac{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}+1} + \sqrt{\sqrt{3}-1}} \right]^{\sqrt{2}} \quad \text{Obtenemos:}$$

- A) 1 B) $1 + \sqrt{2}$
C) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
D) $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ E) $\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$

81. Proporcionar el valor de "α" si el polinomio

$P(x) \equiv 4x^4 + (\alpha + 3)x^3 + 5x^2 + (\alpha + 1)x + 1$
admite raíz cuadrada exacta.

- A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

82. El equivalente de:

$$\frac{(\sqrt{5} + \sqrt[4]{5} \sqrt[4]{9-4\sqrt{5}})^{(\sqrt{5}-2)^3 - \sqrt{5}}}{(\sqrt{5} + 2)^{5-\sqrt{5}}} \quad \text{es:}$$

- A) $-12 + 12\sqrt{5}$ B) $-38 + 17\sqrt{5}$
C) $7 + 7\sqrt{5}$
D) $-38 + 7\sqrt{5}$ E) $24 - 17\sqrt{5}$

83. Encontrar el radical equivalente a:

$$\sqrt{2\sqrt{6}\sqrt{6} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}$$

- A) $\sqrt[4]{12} + \sqrt[4]{8}$ B) $\sqrt{12} + \sqrt{18}$
C) $\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{8}$
D) $\sqrt[4]{12} - \sqrt[4]{8}$ E) $2 + \sqrt{3}$

84. Simplificar:

$$\frac{\sqrt[3]{(a+b)\sqrt{a^2-b^2}} \sqrt[8]{a^3-b^3}}{\sqrt{(a+b)}\sqrt{(a-b)}\sqrt{a^2+ab+b^2}}$$

- A) $\sqrt[4]{a-b}$ B) $\sqrt[12]{a-b}$ C) $\sqrt[24]{a-b}$
D) $\sqrt[18]{a-b}$ E) $\sqrt{a-b}$

85. Si al extraer la raíz cuadrada a:

$$P(x) \equiv 4x^{12} + 12x^9 - 11x^6 - 32x^3 + 27$$

El residuo toma el valor de: -248. Es porque "x" vale.

- A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

86. Calcular "
- $\alpha + \theta$
- " si la raíz cuadrada de:

$$P(x) \equiv 9x^4 + \alpha x^3 + \theta x^2 - 67x + 54$$

deja como resto un binomio idéntico a: $3x+5$

- A) 35 B) 37 C) 36
D) 38 E) 6

87. Si
- $R(x) \equiv 6x^3$
- . Es el residuo de extraer raíz cuadrada al polinomio:

$$P(x) \equiv ax^{12} + bx^9 - 11x^6 - 6x^3 + 4$$

¿Cuál es el valor de " $b-a$ "?

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

88. Reducir:
- $E = \sqrt{5 + \sqrt{23}} \cdot \sqrt{11 - \sqrt{23}} - \sqrt{23}$

- A) 3 B) 7 C) $\sqrt{3}$
D) 12 E) 17

89. Si se establece la siguiente equivalencia:

$$\sqrt[4]{8x^2 + 24x + 9 + 4(2x+3)\sqrt{x^2 + 3x}} < \sqrt{x + \alpha} + \theta\sqrt{x}$$

Calcular el valor de: $\alpha^2 + \theta^3$

- A) 7 B) 10 C) 13
D) 17 E) 21

90. El equivalente de:

$$\frac{2\sqrt{11} + \sqrt{33}}{\sqrt{22} + \sqrt{22 + 11\sqrt{3}}} + \frac{2\sqrt{7} - \sqrt{21}}{\sqrt{14} - \sqrt{14 - 7\sqrt{3}}} \text{ Es:}$$

- A) $\sqrt{2}$ B) 4 C) $\sqrt{3}$
D) 2 E) $\sqrt{5}$

91. Uno de los radicales simples en los que se puede descomponer:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{4} - 2} \text{ Admite como radicando a:}$$

- A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{6}{5}$ C) $\frac{4}{3}$
D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{4}{9}$

92. Luego de racionalizar:
- $\frac{1996\sqrt{1997}}{2^{15}\sqrt[5]{243+1}}$

Indicar el denominador resultante

- A) 20 B) 15 C) 25
D) 12 E) 55

93. Indique el denominador racional de:

$$\frac{9\sqrt[9]{97^{98}}}{\sqrt{2^3} + \sqrt[3]{3^2}}$$

- A) 431 B) 341 C) 134
D) 413 E) 224

94. Al Racionalizar:
- $\frac{6 + 3\sqrt[4]{63} + 2\sqrt{7}}{\sqrt[4]{7} + \sqrt{3} + 2}$

Qué denominador se obtiene:

- A) 544 B) 452 C) 345
D) 454 E) 245

95. Luego de racionalizar:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2}(\sqrt[4]{2} + 1)(\sqrt[4]{2} + 2)(\sqrt[4]{2} + 3) + 1}$$

El denominador es:

- A) 87 B) 81 C) 85
D) 91 E) 97

96. Si: $\{a; b; c\} \subset \mathbb{Q}^+$. Calcular "4abc" sabiendo que:

$$\sqrt{7} + \sqrt{30} + \sqrt{10} + \sqrt{3} <> \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

- A) 7 B) 9 C) 15
D) 17 E) 36

97. Teniendo en cuenta que: 0 = cero y además que:

$$\sqrt{(0,4 + 0,2\sqrt{3})(0,3 + 0,2\sqrt{2})} <> \sqrt{0,0a} \\ + \sqrt{0,0b} + \sqrt{0,0c} + 0,1$$

Que valor asume "a + b + c"

- A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

98. Si $a > 0,125$. El equivalente de:

$$\sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$$

Es:

- A) $\sqrt[3]{a+1}$ B) $a-1$ C) 1
D) 2a E) $a+1$

99. Racionalizar: $\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$

- A) $\sqrt[4]{2}$ B) $2\sqrt[4]{2}$ C) $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$
D) $4\sqrt[4]{2}$ E) 2

100. Si $x > y > z$. Determinar un trío de valores racionales que verifiquen:

$$\sqrt[3]{34} <> \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}$$

Indicando como respuesta el valor de:

"3x + y + 2z"

- A) 0,5 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) 2,5

**CLAVES**

1	E
2	D
3	C
4	B
5	D
6	A
7	D
8	A
9	A
10	C
11	D
12	A
13	A
14	B
15	A
16	E
17	B
18	E
19	D
20	D
21	E
22	C
23	B
24	A
25	A

26	A
27	B
28	D
29	B
30	A
31	C
32	D
33	B
34	A
35	D
36	C
37	E
38	E
39	B
40	A
41	C
42	C
43	D
44	B
45	B
46	D
47	E
48	B
49	B
50	B

51	D
52	D
53	A
54	A
55	B
56	B
57	D
58	B
59	A
60	B
61	E
62	C
63	C
64	A
65	B
66	D
67	A
68	E
69	C
70	B
71	E
72	B
73	C
74	D
75	E

76	D
77	A
78	C
79	C
80	E
81	E
82	B
83	A
84	C
85	C
86	A
87	D
88	A
89	B
90	D
91	E
92	C
93	A
94	D
95	B
96	C
97	E
98	C
99	C
100	D

EXÁMENES DE ADMISIÓN UNF

UNI - 2005 - I

PROBLEMA 01: Simultáneamente al conjunto de los números reales, se dice que la matriz M es la raíz cuadrada de la matriz N si $M^2 = N$.
Entonces, el valor de x para el cual la matriz

$$\begin{bmatrix} 7 & -19 \\ x & -7 \end{bmatrix} \text{ es la raíz cuadrada de } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ es}$$

A) 0

B) 3

C) -16

D) 16

E) no existe

Resolución:

Del enunciado:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -16 \\ x & -7 \end{bmatrix}^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -16 \\ x & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -16 \\ x & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 - 16x & 7(-16) + (-16)(-7) \\ 7x - 7x & x(-16) + (-7)(-7) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 - 16x & 0 \\ 0 & 79 - 16x \end{bmatrix}$$

Como las dos matrices son iguales, debe cumplirse:

$$49 - 16x = 1$$

$$x = 3$$

Rpta.: B

PROBLEMA 02: Dada la ecuación algebraica

$$\frac{x^2 - 4}{|x + 3|} = \frac{3}{2}x$$

Determine el número de raíces reales que posee dicha ecuación:

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

Resolución:

Dada la ecuación:

$$\frac{x^2 - 4}{|x + 3|} = \frac{3}{2}x \quad \dots(*)$$

I) Si $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3 \quad \dots(\alpha)$

$$\frac{x^2 - 4}{x + 3} = \frac{3}{2}x$$

$$x^2 + 9x + 8 = 0$$

$$(x + 1)(x + 8) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -1; x_2 = -8$$

Pero por la condición (α) : C.S. = $\{-1\}$

II) Si $x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3 \quad \dots(\beta)$

En la ecuación $(*)$:

$$\frac{x^2 - 4}{-(x + 3)} = \frac{3}{2}x$$

$$5x^2 + 9x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4(5)(-8)}}{2(5)}$$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{241}}{10}$$

$$\Rightarrow x_1 = -2,452 ; x_2 = 0,652$$

Pero por la condición (β) : C.S. $_2 = \emptyset$

Finalmente podemos afirmar que la ecuación tiene solo una (1) raíz real

$$(x = -1)$$

Rpta.: B

Otra solución de II:

Si $x + 3 < 0$

$$\Rightarrow x < -3$$

En la ecuación $(*)$:

$$\frac{x^2 - 4}{|x + 3|} = \frac{3}{2}x$$

Como se presenta una incoherencia, no tiene soluciones.

PROBLEMA 03: Sea la sucesión a_n ($n > 0$) definida por:

$$a_n = \log p \text{ si existe un primo } p \text{ y un } k \text{ entero no negativo tal que } n = p^k \text{ y}$$

$$a_n = 0 \text{ en cualquier otro caso.}$$

Entonces, la suma de los términos a_m , donde m es un divisor (positivo) de 72, es igual a:

A) $\log 8$

B) $\log 24$

C) $\log 36$

D) $\log 72$

E) $\log 144$

Resolución:

La sucesión a_n ; $n > 0$, se define:

$$a_n = \log P, \text{ si existe un número primo } P \text{ y un } K$$

entero no negativo, tal que $n = p^k$.

$$a_n = 0, \text{ en cualquier otro caso:}$$

Se pide calcular la suma de los términos a_m , donde m es un divisor positivo de 72, es decir:

$$m = 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72$$

Calculando los a_m :

$$a_1 = \log P; 1 = p^0; P \text{ es un número primo}$$

$$a_2 = \log 2; 2 = 2^1$$

$$a_4 = \log 2; 4 = 2^2$$

$$a_3 = \log 3; 3 = 3^1$$

$$a_6 = 0; \text{ no existe un número primo que elevado a un } K \text{ se a iguala 6.}$$

$$a_8 = \log 2; 8 = 2^3$$

$$a_9 = \log 3; 9 = 3^2$$

$$a_{12} = 0; a_{18} = 0; a_{24} = 0; a_{36} = 0; a_{72} = 0$$

Cálculo de la suma de los a_m :

$$S_m = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_6 + a_8 + a_9 + a_{12} + a_{24} + a_{36} + a_{72}$$

$$= \log P + \log 2 + \log 3 + \log 2 + \log 2 + \log 3$$

$$= \log(p \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3)$$

$$= \log 72p$$

Por definición un número : $p \geq 2$

$$\text{Si } P = 2 \Rightarrow S_m = \log 72p = \log 144$$

Obviamos calcular para valores $p > 2$, pues estos nos darán resultados mayores a los que se encuentran en las alternativas de respuestas.

Rpta.: E

PROBLEMA 04: Determine el valor de

$$s(n) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{2}{4k^2 - 1} + \frac{1}{2n+1} \right]$$

A) $\frac{n}{2n+1}$

B) $\frac{2n}{3n+1}$

C) $\frac{3n}{2n+1}$

D) $\frac{2n-1}{2n+1}$

E) $\frac{n+1}{2n+1n}$

Resolución:

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{2}{4k^2 - 1} + \frac{1}{2n+1} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{4k^2 - 1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{\underbrace{(2k+1)(2k-1)}_I} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\underbrace{2n+1}_{II}} \end{aligned}$$

En la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{2}{(2k+1)(2k-1)} &= \frac{A}{2k+1} + \frac{B}{2k-1} \\ &= \frac{2k(A+B) + B - A}{(2k+1)(2k-1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A + B = 0$$

$$B - A = 2$$

Resolviendo obtenemos : $A = -1$ y $B = 1$

En la expresión (I):

$$S_I = \sum_{k=1}^n \frac{2}{(2+1)(2k-1)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \\
 &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots - \left(\frac{1}{2(n-1)+1} + \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{2n+1}
 \end{aligned}$$

En la expresión (II):

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+1} \\
 &= n \left(\frac{1}{2n+1} \right) \\
 &= \frac{n}{2n+1}
 \end{aligned}$$

Finalmente sumamos:

$$\begin{aligned}
 S_{(n)} &= S_I + S_{II} = \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) + \frac{n}{2n+1} \\
 &= \frac{3n}{2n+1}
 \end{aligned}$$

Rpta.: C

PROBLEMA 05:

Sea la matriz $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces la matriz X^{11} es:

A) $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 1024 & 0 & 1024 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1024 & 0 & 1024 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 100 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 \\ 100 & 0 & 100 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 59049 & 0 & 59049 \\ 0 & 1 & 0 \\ 59049 & 0 & 59049 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 1000 & 0 & 1000 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1000 & 0 & 1000 \end{bmatrix}$

Resolución:

Primero hallaremos una fórmula, así :

$$x^1 = x^0 \cdot x^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^0 & 0 & 2^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x^2 = x^1 \cdot x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^1 & 0 & 2^1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^1 & 0 & 2^1 \end{bmatrix}$$

$$x^3 = x^2 \cdot x = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{bmatrix}$$

$$x^4 = x^3 \cdot x = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 & 2^3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^3 & 0 & 2^3 \end{bmatrix}$$

.

.

.

$$x^n = x^{n-1} \cdot x = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ n & 1 & 0 & n & 1 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}; n=0; 1; 2; 3; \dots$$

En el ejercicio hacemos $n = 11$

$$x^{11} = x^{11-1} \cdot x = \begin{bmatrix} 2^{10} & 0 & 2^{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{10} & 2^{10} & 2^{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1024 & 0 & 1024 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1024 & 0 & 1024 \end{bmatrix}$$

Rpta.: B

PROBLEMA 06: Sea f una función definida por

$$f(x) = x - \sqrt{-x} + 1, \quad x < -4$$

halle f^* (inversa de f) indicando su dominio

$$A) f^*(x) = \frac{1}{4}(\sqrt{5-4x} + 1)^2, \quad \langle -\infty, -5 \rangle$$

$$B) f^*(x) = -\frac{1}{4}(\sqrt{4-5x} + 1)^2, \quad \langle -\infty, -6 \rangle$$

$$C) f^*(x) = -\frac{1}{4}(\sqrt{5-4x} + 1)^2, \quad \langle -\infty, -5 \rangle$$

$$D) f^*(x) = -\frac{1}{4}(\sqrt{5-4x} - 1)^2, \quad \langle -\infty, -5 \rangle$$

$$E) f^*(x) = -\frac{1}{4}(\sqrt{4x-5} - 1)^2, \quad \langle -\infty, -6 \rangle$$

Resolución:

$$f(x) = x - \sqrt{-x} + 1; \quad x < -4 \quad \dots (*)$$

$$\Rightarrow \text{Dom } f(x) = \langle -\infty; -4 \rangle$$

 $f(x)$ es una función creciente, luego:

$$f(-4) = -4 - \sqrt{-(-4)} + 1 = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty - \sqrt{-(-\infty)} + 1 = -\infty$$

$$\Rightarrow \text{Ran } f(x) = \langle -\infty; -5 \rangle$$

Por definición: $\text{Dom } f^*(x) = \text{Ran } f(x)$

$$\Rightarrow \text{Dom } f^*(x) = \langle -\infty; -5 \rangle$$

Hallando la función inversa $f^*(x)$:

$$\text{Si } f^*(x) = y \Rightarrow y = x - \sqrt{-x} + 1$$

$$y = -\left(-x + \sqrt{-x} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} + 1$$

$$y = -\left(\sqrt{-x} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

$$-\left(y - \frac{5}{4}\right) = \left(\sqrt{-x} + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{5-4y} = \sqrt{-x} + \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{-x} = \frac{1}{2}\sqrt{5-4y} - \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{-x} = \frac{1}{2}(\sqrt{5-4y} - 1)$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{4}(\sqrt{5-4y} - 1)^2$$

Finalmente :

$$f^*(x) = -\frac{1}{4}(\sqrt{5-4x} - 1)^2 ; x \in \langle -\infty ; -5 \rangle$$

Rpta.: D

PROBLEMA 07: El conjunto solución de la inequación $\log_3 |3-4x| > 2$ es:

A) $\left\langle -\frac{3}{2}; 3 \right\rangle$

B) $\mathbb{R} - \left[-\frac{3}{2}; 3 \right]$

C) $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2}; 3 \right\}$

D) $\mathbb{R}$

E) $\mathbb{R} - \left\langle -\frac{3}{2}; 3 \right\rangle$

Resolución:

En la ecuación : $\log_3 |3-4x| > 2 \quad \dots(1)$

Donde : $3-4x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{4} \quad \dots(2)$

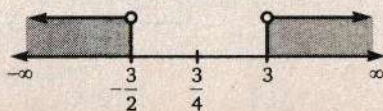
Además por teoría : $2 = \log_3 9$

Luego en la inequacion(1):

$$\log_3 |3-4x| > \log_3 9$$

$$\Rightarrow 3-4x < -9 \vee 3-4x > 9$$

$$x > 3 \vee x < -\frac{3}{2}$$



$$\begin{aligned} \text{C.S.} &= \left\langle -\infty; -\frac{3}{2} \right\rangle \vee \langle 3; \infty \rangle \\ &= \mathbb{R} - \left[-\frac{3}{2}; 3 \right] \end{aligned}$$

Rpta.: B**PROBLEMA 08:** Dada la región

$$A = \{Z \in \mathbb{C} / |Z - 2 - i| \leq 3 \vee |Z + 2 - i| \leq 3\}$$

Halle Z_1 y Z_2 en A tal que $|Z_1 - Z_2|$ sea el valor máximo. De como respuesta Z_1, Z_2

A) -29

B) -28

C) -26

D) -20

E) -18

Resolución:

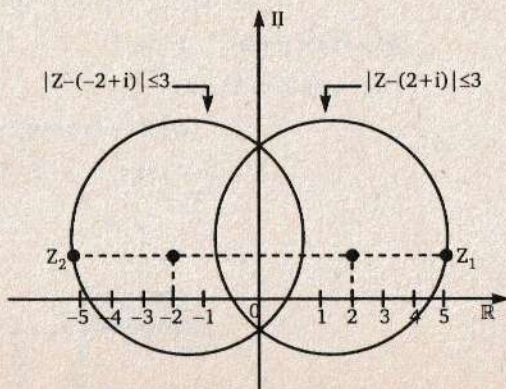
Por definición de números complejos

$$|Z - Z_0| \leq r$$

La expresión $|Z - Z_0|$ es el modulo de la diferencia de dos números complejos, y representa un conjunto de puntos que forman un círculo cerrado de radio "r" y cuyo centro se ubica en la coordenada de Z_0 .

En la expresión: $A = \{Z \in \mathbb{C} / |Z + 2 - i| \leq 3 \vee |Z + 2 - i| \leq 3\}$

$$\Rightarrow |Z - (-2 + i)| \leq 3 \vee |Z - (2 - i)| \leq 3$$



Para que el valor de $|Z_1 - Z_2|$ sea máximo éste números debe estar ubicado sobre la línea diametral de los dos círculos y en extremos opuestos. Del gráfico podemos deducir que:

$$Z_1 = 5 + 1i = 5 + i$$

$$Z_2 = -5 + 1i = -5 + i$$

Multiplicando estos dos números:

$$Z_1 \cdot Z_2 = (5 + i) \times (-5 + i)$$

$$= -25 + 5i - 5i + i^2$$

$$= -25 - 1$$

$$= -26$$

Rpta.: C

PROBLEMA 09: Determine el conjunto solución de la inecuación

$$|x - 2| - 3|x + 21| < 0$$

A) $(-\infty; -32,5) \cup (-15,25; +\infty)$ B) $(-\infty; -11,5) \cup (-4,5; +\infty)$

C) $(-115; -4,5)$

D) $(-32,5; -15,25)$ E) $(-\infty; -32,5) \cup (-4,5; +\infty)$

Resolución:

Propiedad: Si $|M(x)| < |N(x)|$

$$\Rightarrow (M(x) + N(x))(M(x) - N(x)) < 0$$

En el problema:

$$|x - 2| < 3|x + 21|$$

$$|x - 2| < |3x + 63|$$

$$[(x - 2) + (3x + 63)][(x - 2) - (3x + 63)] < 0$$

$$(4x + 61)(-2x - 65) < 0$$

$$(4x + 61)(2x + 65) > 0$$

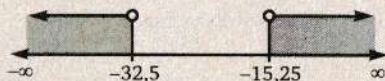
Calculando los puntos críticos:

$$4x + 61 = 0 \quad ; \quad 2x + 65 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-61}{4} \quad \Rightarrow x_2 = \frac{-65}{2}$$

$$= -15,25 \quad = -32,5$$

Por propiedad:



$$c.s = \langle -\infty; 32,5 \rangle \cup \langle -15,25; +\infty \rangle$$

Rpta.: A

UNI - 2005 - II

PROBLEMA 10: Calcule el conjunto solución de la inecuación:

$$(x - 2^{-2})^2 + 4x + 2 < 0$$

A) $\left\langle -\frac{13}{4}; -\frac{3}{4} \right\rangle$

B) $\left\langle -\frac{11}{4}; -\frac{3}{4} \right\rangle$

C) $\left\langle -\frac{9}{4}; -\frac{3}{4} \right\rangle$

D) $\left\langle -\frac{13}{4}; -\frac{5}{4} \right\rangle$

E) $\left\langle -\frac{11}{4}; -\frac{5}{4} \right\rangle$

Resolución:

$$(x - 2^{-2})^2 + 4x + 2 < 0$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 4x + 2 < 0$$

$$x^2 + \frac{56}{16}x + \frac{33}{16} < 0$$

$$16x^2 + 56x + 33 < 0$$

$$(4x + 11)(4x + 3) < 0$$

Los puntos de corte serán:

$$x_1 = -\frac{11}{4} \wedge x_2 = -\frac{3}{4}$$



Por definición si la expresión es menor que cero (0) el conjunto solución estará dado por el intervalo negativo que se muestra en el gráfico, es decir :

$$x \in \left\langle -\frac{11}{4}; -\frac{3}{4} \right\rangle$$

Rpta.: B

PROBLEMA 11: Sea Y un número real no nulo. Calcule $(E+L)-(T+U)$, si E, L, T y U satisfacen el siguiente producto de matrices:

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ T & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & L \\ T & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ E & L \end{pmatrix}$$

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

Resolución:

ejecutando la operación de multiplicación de matrices:

$$YE = Y \quad \dots(I)$$

$$YL = 0 \quad \dots(II)$$

$$TE + UT = E \quad \dots(III)$$

$$TL + U^2 = L \quad \dots(IV)$$

$$\text{De (I):} \quad YE = Y \Rightarrow E = 1 \text{ y } Y \neq 0 \quad \dots(1)$$

$$\text{De (II):} \quad YL = 0 \Rightarrow L = 0 \quad \dots(2)$$

$$\text{De (IV):} \quad TL + U^2 = L$$

$$\text{De (2):} \quad T(0) + U^2 = 0 \Rightarrow U = 0 \quad \dots(3)$$

$$\text{De (III):} \quad TE + UT = E$$

$$\text{De (1) y (3):} \quad T(1) + (0)T = 1$$

$$\Rightarrow T = 1 \quad \dots(4)$$

Calculo de la expresión pedida, de (1), (2), (3) y (4):

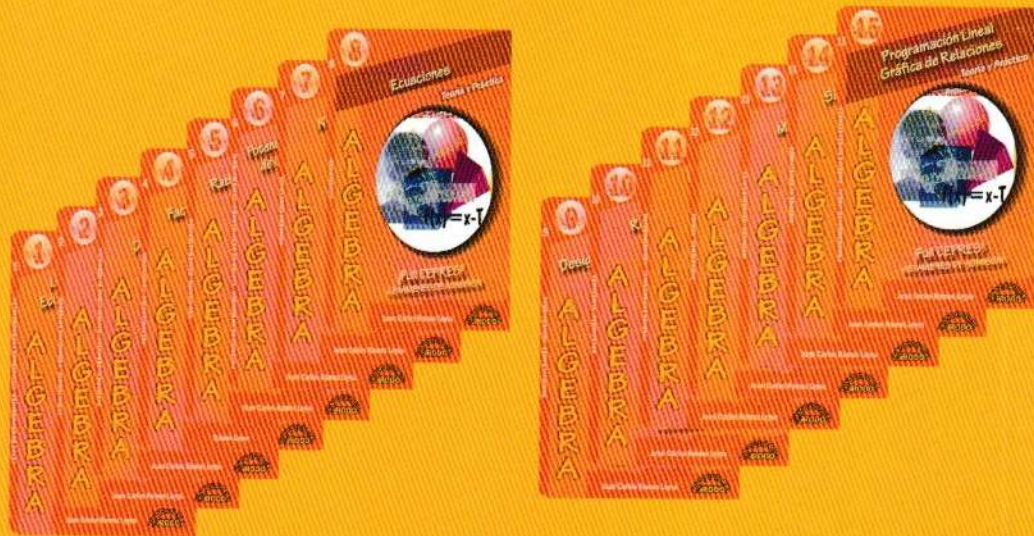
$$S = (E + L) - (T + U)$$

$$S = (1 + 0) - (1 + 0)$$

$$S = 0$$

Rpta.: A

- | | |
|----|---|
| 2 | El polinomio - Productos Notables |
| 3 | División Algebraica - Divisibilidad Algebraica |
| 4 | Factorización - Fracciones |
| 5 | Radicación - Racionalización |
| 6 | Potencia de un Binomio - Factorial de un Número -Combinatoria |
| 7 | Números Complejos |
| 8 | Ecuaciones |
| 9 | Desigualdades - Inecuaciones |
| 10 | Relaciones - Funciones |
| 11 | Función Exponencial - Logarítmación |
| 12 | Sucesiones - Series |
| 13 | Matrices - Determinantes |
| 14 | Sistema de Ecuaciones |
| 15 | Programación Lineal - Gráficas de Relaciones |



N°

TEMA

1

Leyes de Exponentes - Ecuaciones Exponenciales